



Moce i kompensacja w obwodach z odkształconymi i niesymetrycznymi przebiegami prądu i napięcia

Część 6. Moce i kompensacja reaktancyjna w układach trójfazowych z przewodem neutralnym z sinusoidalnymi przebiegami prądu i napięcia

prof. dr hab. inż. Leszek S. CZARNECKI

Fellow IEEE, Alfredo M. Lopez Distinguished Professor, Louisiana State University, USA, e-mail: lsczar@cox.net

POWERS AND COMPENSATION IN SYSTEMS WITH NONSINUSOIDAL VOLTAGES AND CURRENTS.

Part 6. Powers and reactive compensation in three-phase systems with neutral conductor and sinusoidal voltages and currents.

Abstract: Most of residential and industrial distribution systems as well as traction and distribution systems in commercial buildings are three-phase systems with a neutral conductor. Due to single-phase loads, such systems can have a substantial load imbalance and consequently, supply currents asymmetry. This asymmetry, along with reactive power, degrades the power factor. Therefore, compensation can be needed more often just in such systems than in other ones. Unfortunately, for decades the power theory was not capable of describing power properties of such systems and in particular, to provide a power equation. This major difficulty was eventually removed in a frame of the Currents' Physical Components (CPC) power theory.

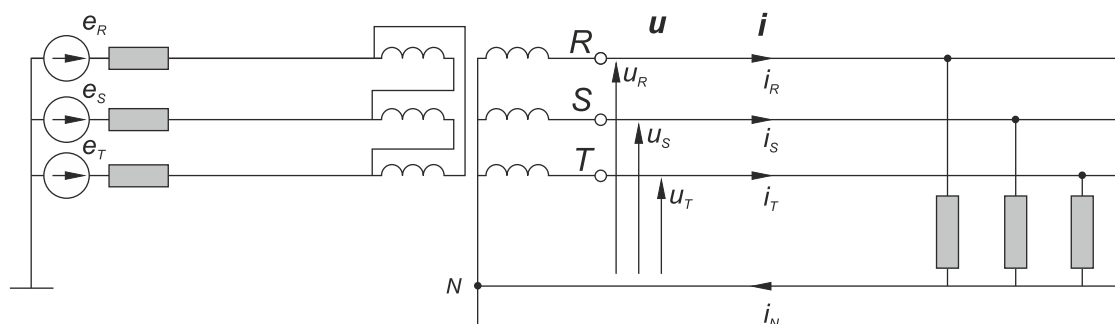
Streszczenie: Systemy rozdzielcze na poziomie użytkownika energii elektrycznej jednocześnie przez odbiorniki trójfazowe oraz jednofazowe, są układami trójfazowymi z przewodem zerowym. Dlatego też, są to układy, w których najczęściej pojawia się potrzeba poprawy współczynnika mocy na drodze kompensacji. Niestety, przez wiele dziesięcioleci teoria mocy nie była w stanie poprawnie opisać zjawisk energetycznych w takich obwodach. Nie było bowiem znane poprawne równanie mocy takich układów, a zatem i poprawna wartość współczynnika mocy. Przyczyną tego była między innymi błędna definicja mocy pozornej S . Trudności te zostały usunięte dopiero w ramach teorii składowych fizycznych prądu (ang.: Currents' Physical Components, CPC).

Keywords: power theory, reactive compensation, supply currents asymmetry

Słowa kluczowe: teoria mocy, współczynnik mocy, asymetria prądów

1. WPROWADZENIE

Sieci rozdzielcze w dzielnicach mieszkaniowych, budynkach handlowych czy biurowych zasilają głównie odbiorniki jednofazowe, jakkolwiek towarzyszą im zwykle także i odbiorniki trójfazowe. Budowane są w związku z tym jako sieci trójfazowe z przewodem neutralnym, tak, jak to pokazuje rys. 1. Ponieważ silniki nie są w takich sieciach odbiornikami dominującymi, można je traktować jako sieci z odbiornikami stacjonarnymi.



Rys. 1. Układ trójfazowy z przewodem neutralnym Fig. 1. Three-phase system with neutral conductor

Ze względu na obecność odbiorników jednofazowych, sieci takie mogą mieć niekiedy znaczny poziom niezrównoważenia, a zatem asymetrię prądów zasilających. Asymetria taka może być szczególnie widoczna w sieciach trakcyjnych.

Pomimo że znacząca część energii elektrycznej wykorzystywana jest w takich właśnie układach, elektrotechnika teoretyczna nie dostarczyła do tej pory [5, 6] poprawnego opisu zjawisk energetycznych w czteroprzewodowych niezrównoważonych układach trójfazowych, nawet wtedy, gdy prądy i napięcia są sinusoidalne. W szczególności, powszechnie stosowane równanie mocy:

$$S^2 = P^2 + Q^2, \quad (1)$$

nie jest poprawne w obecności asymetrii prądów zasilania. Nie jest też wtedy poprawna wartość współczynnika mocy $\lambda = P/S$. Zostało to pokazane w artykułach [3, 7] dla układów trójfazowych, trójprzewodowych, lecz wniosek ten ważny jest także dla obwodów czteroprzewodowych.

Współczynnik mocy w obecności asymetrii prądów zasilania ma poprawną wartość tylko wtedy, gdy moc pozorna S zdefiniowana jest [3, 4, 7], jako iloczyn trójfazowych wartości skutecznych $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{i}\|$ wektorów prądu i napięcia zasilania $\mathbf{u} = [u_R, u_S, u_T]^T$, $\mathbf{i} = [i_R, i_S, i_T]^T$, mianowicie

$$S \stackrel{\text{df}}{=} \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{i}\| . \quad (2)$$

Koncepcja trójfazowych wartości skutecznych została wprowadzona dla przebiegów niesinusoidalnych w artykule [2] i jest szczegółowo omówiona w artykule [6]. Trójfazowe wartości skuteczne sinusoidalnych napięć i prądów mają wartość

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{U_R^2 + U_S^2 + U_T^2}, \quad \|\mathbf{i}\| = \sqrt{I_R^2 + I_S^2 + I_T^2} . \quad (3)$$

Wybór poprawnej definicji mocy mocy pozornej S nie jest jednak jedynym problemem. Jeśli nawet moc ta zostanie poprawnie zdefiniowana wzorem (2), to wtedy, gdy prądy odbiornika nie są symetryczne, równanie mocy (1) nie może być spełnione. Z równania tego nie wynika, że asymetria prądów powiększa moc pozorną odbiornika.

Równanie mocy ma w pierwszym rzędzie znaczenie poznawcze: wyjaśnia, jakie zjawiska w odbiorniku powiększają jego moc pozorną, a więc obciążenie układów zasilających. Może mieć ono i znaczenie praktyczne, mianowicie dostarczać informacji potrzebnych do projektowania kompensatorów poprawiających współczynnik mocy. Równanie mocy nie jest jednak do projektowania kompensatorów niezbędne. Były one budowane w przeszłości, zanim układy trójfazowe poprawnie opisano równaniem mocy. Pierwszy kompensator równoważący odbiornik trójfazowy został zaproponowany w 1917 r. [1] przez Steinmetza, który zauważył, że asymetria prądowa powoduje oscylacje energii między źródłem zasilania a odbiornikiem. Steinmetz opracował obwód likwidujący te oscylacje: – był to właśnie reaktancyjny kompensator równoważący. Potem, gdy Fortescue wynalazł w 1918 metodę składowych symetrycznych, kompensatory równoważące mogły być projektowane jako urządzenia kompensujące składową symetryczną kolejności ujemnej (przeciwniej) prądu zasilania odbiornika. Obecnie można projektować kompensatory równoważące w układach trójfazowych, trójprzewodowych jako obwody kompensujące moc niezrównoważenia odbiornika.

Pomimo że poprawne równanie mocy nie jest niezbędne do projektowania kompensatorów równoważących, może ono tworzyć bardzo solidną podstawę ich projektowania. Pokazano to w artykule [7] o kompensacji w obwodach trójfazowych, trójprzewodowych. Wymaga to znalezienia matematycznego związku między mocą niezrównoważenia a parametrami obwodu. Taki związek został znaleziony dla obwodów trójprzewodowych i opisany w artykułach [2, 7]. Niniejszy artykuł rozszerza poprzednie wyniki na układy trójfazowe z przewodem neutralnym.

2. SKŁADOWE FIZYCZNE PRĄDU W UKŁADACH TRÓJFAZOWYCH Z PRZEWODEM NEUTRALNYM

Rozważmy obwód trójfazowy, w którym odbiornik składa się z trzech odbiorników jednofazowych włączonych między poszczególnymi fazami a przewodem neutralnym, jak jest to pokazane na rys. 2(a). Przyjmijmy, że odbiorniki te są liniowe, niezmiennie w czasie a napięcie zasilania jest sinusoidalne i symetryczne. Napięcie to może być uporządkowane w wektor trójfazowy:

$$\mathbf{u} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left\{ \begin{bmatrix} U_R \\ U_S \\ U_T \end{bmatrix} e^{j\omega t} \right\} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{U} e^{j\omega t} \} . \quad (4)$$

Prąd zasilania takiego odbiornika można przedstawić w postaci wektora trójfazowego

$$\mathbf{i} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left\{ \begin{bmatrix} I_R \\ I_S \\ I_T \end{bmatrix} e^{j\omega t} \right\} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{I} e^{j\omega t} \} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left\{ \begin{bmatrix} Y_R U_R \\ Y_S U_S \\ Y_T U_T \end{bmatrix} e^{j\omega t} \right\} . \quad (5)$$

Moc zespolona odbiornika:

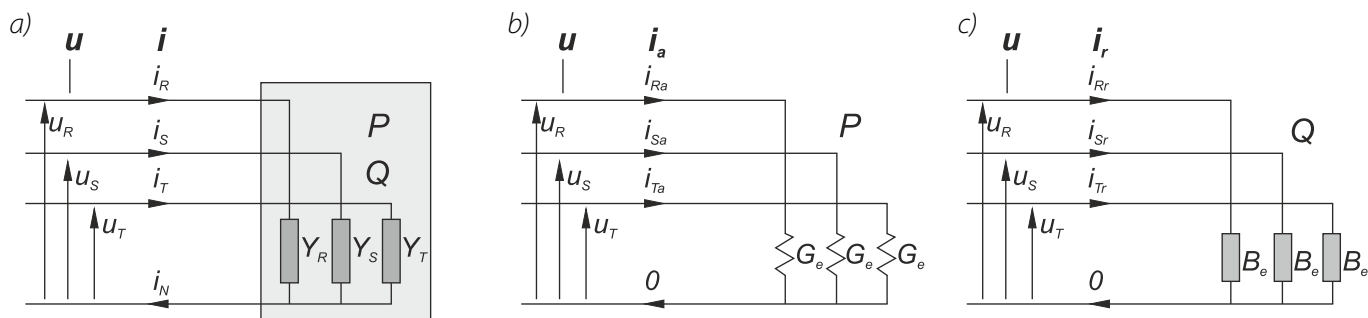
$$\mathbf{C} = P + jQ = \mathbf{U}^T \mathbf{I}^* = (\mathbf{Y}_R^* + \mathbf{Y}_S^* + \mathbf{Y}_T^*) \mathbf{U}_R^2 . \quad (6)$$

Moc tę nazywa się zwykle „zespoloną mocą pozorną” i oznacza symbolem \mathbf{S} . Nazwa ta i symbol mogą jednak prowadzić do błędów, gdyż w układach z asymetrią prądową moduł mocy \mathbf{S} nie jest równy mocy pozornej S , zdefiniowanej wzorem (2).

Moc czynna i bierna odbiornika mają wartości

$$P = \operatorname{Re}\{\mathbf{C}\} = \operatorname{Re}\{\mathbf{Y}_R^* + \mathbf{Y}_S^* + \mathbf{Y}_T^*\} U_R^2 = (G_R + G_S + G_T) U_R^2, \quad (7)$$

$$Q = \operatorname{Im}\{\mathbf{C}\} = \operatorname{Im}\{\mathbf{Y}_R^* + \mathbf{Y}_S^* + \mathbf{Y}_T^*\} U_R^2 = -(B_R + B_S + B_T) U_R^2. \quad (8)$$



Rys. 2. a) Odbiornik trójfazowy; b) odbiornik równoważny ze względu na moc czynną P ; c) ze względu na moc bierną Q
Fig. 2. a) Three-phase load; b) its equivalent load with respect to active power P ; c) with respect to reactive power Q

Odbiornik ten jest równoważny, ze względu na moc czynną P , zrównoważonemu odbiornikowi rezystancyjnemu, pokazanemu na rysunku 2 b, o konduktancji fazowej

$$G_e = \frac{P}{\|\mathbf{u}\|^2} = \frac{P}{3U_R^2} = \frac{1}{3}(G_R + G_S + G_T), \quad (9)$$

zwanej **konduktancją równoważną**. Prąd zasilania tego odbiornika

$$\mathbf{i}_a(t) = G_e \mathbf{u}(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{G_e \mathbf{U} e^{j\omega t}\}, \quad (10)$$

jest prądem symetrycznym, w fazie z napięciem zasilania. Jest to najmniejszy prąd odbiornika, który zasilany napięciem \mathbf{u} ma moc czynną P . Jest to **prąd czynny** odbiornika.

Odbiornik na rys. 2(a) jest równoważny, ze względu na moc bierną Q , zrównoważonemu odbiornikowi reaktancyjnemu, pokazanemu na rys. 2(c), o susceptancji

$$B_e = -\frac{Q}{\|\mathbf{u}\|^2} = -\frac{1}{3} \frac{Q}{U_R^2} = \frac{1}{3}(B_R + B_S + B_T), \quad (11)$$

zwanej **susceptancją równoważną**. Prąd zasilania takiego odbiornika jest prądem symetrycznym, przesuniętym o ćwierć okresu względem napięcia zasilania:

$$\mathbf{i}_i = B_e \frac{d}{d(\omega t)} \mathbf{u} = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{jB_e \mathbf{U} e^{j\omega t}\}. \quad (12)$$

Jest to **prąd bierny** odbiornika. Admitancje obu odbiorników zrównoważonych tworzą **admitancję równoważną**:

$$\mathbf{Y}_e \stackrel{\text{df}}{=} G_e + jB_e = \frac{1}{3}(\mathbf{Y}_R + \mathbf{Y}_S + \mathbf{Y}_T). \quad (13)$$

Prąd czynny i prąd bierny mogą być więc wyrażone poprzez admitancję równoważną

$$\mathbf{i}_a + \mathbf{i}_i = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{\mathbf{Y}_e \mathbf{U} e^{j\omega t}\}. \quad (14)$$

Prąd zasilania odbiornika niezrównoważonego jest większy od sumy prądów odbiorników równoważnych ze względu na moc czynną i moc bierną, o prąd

$$\mathbf{i}_u = \mathbf{i} - \mathbf{i}_a - \mathbf{i}_i = \sqrt{2} \operatorname{Re}\left\{ \begin{bmatrix} (\mathbf{Y}_R - G_e - jB_e) \mathbf{U}_R \\ (\mathbf{Y}_S - G_e - jB_e) \mathbf{U}_S \\ (\mathbf{Y}_T - G_e - jB_e) \mathbf{U}_T \end{bmatrix} e^{j\omega t} \right\} = \sqrt{2} \operatorname{Re}\left\{ \begin{bmatrix} (\mathbf{Y}_R - \mathbf{Y}_e) \\ (\mathbf{Y}_S - \mathbf{Y}_e) \alpha^* \\ (\mathbf{Y}_T - \mathbf{Y}_e) \alpha \end{bmatrix} \mathbf{U}_R e^{j\omega t} \right\} \stackrel{\text{df}}{=} \sqrt{2} \operatorname{Re}\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{Ru} \\ \mathbf{I}_{Su} \\ \mathbf{I}_{Tu} \end{bmatrix} e^{j\omega t} \right\}. \quad (15)$$

Istnienie tej składowej w prądzie zasilania odbiornika nie ma związku ani z mocą czynną, ani z mocą bierną odbiornika, a tylko z faktem, że odbiornik ten jest niezrównoważony, dlatego składowa ta będzie określana jako **prąd niezrównoważenia** (ang.: *unbalanced current*).

Obliczmy zespoloną wartość skuteczną składowej symetrycznej kolejności dodatniej (zgodnej; ang.: positive) tego prądu, oznaczanej górnym indeksem "p":

$$\begin{aligned} I_u^p &= \frac{1}{3}(I_{Ru} + \alpha I_{Su} + \alpha^* I_{Tu}) = \frac{1}{3}[(Y_R - G_e - jB_e) + \alpha(Y_S - G_e - jB_e)\alpha^* + \alpha^*(Y_T - G_e - jB_e)\alpha]U_R = \\ &= \frac{1}{3}[(Y_R + Y_S + Y_T) - 3G_e - j3B_e]U_R = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Prąd ten nie ma więc składowej kolejności zgodnej z kolejnością napięć zasilania. Prąd ten pojawia się wyłącznie wskutek niezrównoważenia odbiornika.

Zespolona wartość skuteczna składowej kolejności ujemnej (przeciwnej; ang.: negative) tego prądu, oznaczanej górnym indeksem "n", ma postać

$$\begin{aligned} I_u^n &= \frac{1}{3}(I_{Ru} + \alpha^* I_{Su} + \alpha I_{Tu}) = \frac{1}{3}[(Y_R - G_e - jB_e) + \alpha^*(Y_S - G_e - jB_e)\alpha^* + \alpha(Y_T - G_e - jB_e)\alpha]U_R = \\ &= \frac{1}{3}(Y_R + \alpha Y_S + \alpha^* Y_T)U_R \stackrel{\text{df}}{=} A^n U_R, \end{aligned} \quad (17)$$

gdzie

$$A^n \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{3}(Y_R + \alpha Y_S + \alpha^* Y_T). \quad (18)$$

Wtedy, gdy $Y_R = Y_S = Y_T$, to znaczy, gdy odbiornik jest zrównoważony, współczynnik ten ma wartość zerową. Gdy nie jest on równy zeru, wówczas w prądzie zasilania pojawia się składowa kolejności ujemnej. Dlatego, współczynnik ten będzie nazywany **admitancją niezrównoważenia kolejności ujemnej**.

Zespolona wartość skuteczna składowej kolejności zerowej tego prądu ma postać:

$$\begin{aligned} I_u^z &= \frac{1}{3}(I_{Ru} + I_{Su} + I_{Tu}) = \frac{1}{3}[(Y_R - G_e - jB_e) + (Y_S - G_e - jB_e)\alpha^* + (Y_T - G_e - jB_e)\alpha]U_R = \\ &= \frac{1}{3}(Y_R + \alpha^* Y_S + \alpha Y_T)U_R \stackrel{\text{df}}{=} A^z U_R, \end{aligned} \quad (19)$$

gdzie

$$A^z \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{3}(Y_R + \alpha^* Y_S + \alpha Y_T). \quad (20)$$

Wtedy, gdy współczynnik ten nie jest równy zeru, w prądzie zasilania pojawia się składowa symetryczna prądu kolejności zerowej. Dlatego, współczynnik ten będzie nazywany **admitancją niezrównoważenia kolejności zerowej**.

Prąd niezrównoważenia jest więc sumą dwu składowych symetrycznych:

$$\mathbf{i}_u = \mathbf{i}_u^n + \mathbf{i}_u^z, \quad (21)$$

gdzie

$$\mathbf{i}_u^n \stackrel{\text{df}}{=} \sqrt{2}\text{Re} \left\{ \begin{bmatrix} I_R^n \\ I_S^n \\ I_T^n \end{bmatrix} e^{j\omega t} \right\} = \sqrt{2}\text{Re} \left\{ \begin{bmatrix} A^n U_R \\ A^n U_T \\ A^n U_S \end{bmatrix} e^{j\omega t} \right\} = \sqrt{2}\text{Re} \{ A^n \mathbf{U}^\# e^{j\omega t} \}, \quad (22)$$

jest **prądem niezrównoważenia kolejności ujemnej** oraz

$$\mathbf{i}_u^z \stackrel{\text{df}}{=} \sqrt{2}\text{Re} \left\{ \begin{bmatrix} I_R^z \\ I_S^z \\ I_T^z \end{bmatrix} e^{j\omega t} \right\} = \sqrt{2}\text{Re} \left\{ \begin{bmatrix} A^z U_R \\ A^z U_R \\ A^z U_R \end{bmatrix} e^{j\omega t} \right\} = \sqrt{2}\text{Re} \{ A^z \mathbf{U}_R e^{j\omega t} \}. \quad (23)$$

jest prądem niezrównoważenia kolejności zerowej. Symbol $\mathbf{U}^\#$ we wzorze (22) oznacza wektor zespolonych wartości skutecznych napięć liniowych z zamienionymi pozycjami faz S i T, zaś symbol \mathbf{U}_R we wzorze (23) oznacza wektor trójfazowy zbudowany z wartości \mathbf{U}_R .

W ten sposób prąd zasilania odbiornika został rozłożony na cztery składowe

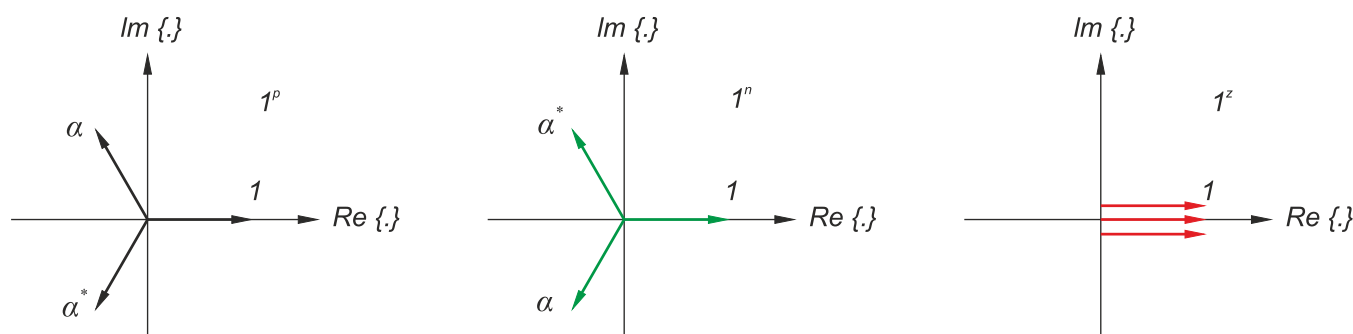
$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_a + \mathbf{i}_T + \mathbf{i}_u^n + \mathbf{i}_u^z. \quad (24)$$

stowarzyszone z czterema odmiennymi zjawiskami w obwodzie, mianowicie ze stałym przepływem energii ze źródła zasilania do odbiornika, z przesunięciem fazowym prądów zasilania odbiornika względem napięcia zasilania, z niezrównoważeniem odbiornika generującym prąd kolejności ujemnej oraz z niezrównoważeniem odbiornika, generującym prąd kolejności zerowej. Są to składowe fizyczne prądu (ang.: *Currents' Physical Components* – CPC) zasilania. Należy jednak podkreślić, że pomimo przymiotnika „fizyczne”, prądy te fizycznie nie istnieją. Są one jedynie produktem pewnego rozkładu, a różnych rozkładów może być nieskończenie wiele. Prądy te są jedynie **stowarzyszone** z określonymi zjawiskami fizycznymi.

Wzory matematyczne definiujące te prądy mogą być nieco uproszczone przez wprowadzenie symetrycznych wektorów jednostkowych, zdefiniowanych jak następuje

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^* \\ \alpha \end{bmatrix} \stackrel{\text{df}}{=} \mathbf{1}^p, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^* \end{bmatrix} \stackrel{\text{df}}{=} \mathbf{1}^n, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \stackrel{\text{df}}{=} \mathbf{1}^z$$

i pokazanych na rys. 3.



Rys. 3. Symetryczne wektory jednostkowe kolejności $\mathbf{1}^p$, $\mathbf{1}^n$ oraz $\mathbf{1}^z$ Fig. 3. Symmetrical unit vectors of the sequence. $\mathbf{1}^p$, $\mathbf{1}^n$ and $\mathbf{1}^z$

Poszczególne składowe fizyczne mogą być z ich pomocą wyrażone wzorami:

$$\mathbf{i}_a(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{\mathbf{1}^p G_e \mathbf{U}_R e^{j\omega t}\}, \quad (25)$$

$$\mathbf{i}_T(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{\mathbf{1}^p jB_e \mathbf{U}_R e^{j\omega t}\}, \quad (26)$$

$$\mathbf{i}_u^n = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{A^n \mathbf{U}^\# e^{j\omega t}\} = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{\mathbf{1}^n A^n \mathbf{U}_R e^{j\omega t}\}, \quad (27)$$

$$\mathbf{i}_u^z = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{A^z \mathbf{U}_R e^{j\omega t}\} = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{\mathbf{1}^z A^z \mathbf{U}_R e^{j\omega t}\}, \quad (28)$$

które podkreślają rodzaj ich symetrii.

Admitancje niezrównoważenia \mathbf{A}^n i \mathbf{A}^z przyjmują wartość zerową wtedy, gdy admitancje odbiornika \mathbf{Y}_R , \mathbf{Y}_S i \mathbf{Y}_T są sobie równe. Jest to jednak warunek wystarczający jedynie na to, aby admitancje te były równe zero. Nie jest to warunek konieczny. Obserwacja ta jest punktem wyjścia do rozważań nad możliwością równoważenia odbiorników niezrównoważonych, a więc do kompensacji prądów niezrównoważenia.

Podział prądu zasilania odbiornika niezrównoważonego na składowe fizyczne umożliwia przedstawienie takiego odbiornika w postaci pewnego odbiornika zastępczego, złożonego z czterech odbiorników odpowiedzialnych za poszczególne składowe fizyczne. W tym celu zauważmy, że zespolona wartość skuteczna prądu niezrównoważonego kolejności przeciwnej w linii S może być przedstawiona w postaci:

$$\mathbf{I}_{Su}^n = A^n \mathbf{U}_T = A^n \alpha^* \mathbf{U}_S = (\alpha^* A^n) \mathbf{U}_S \quad (29)$$

i podobnie, w linii T

$$\mathbf{I}_{Tu}^n = \mathbf{A}^n \mathbf{U}_S = \mathbf{A}^n \alpha \mathbf{U}_T = (\alpha \mathbf{A}^n) \mathbf{U}_T, \quad (30)$$

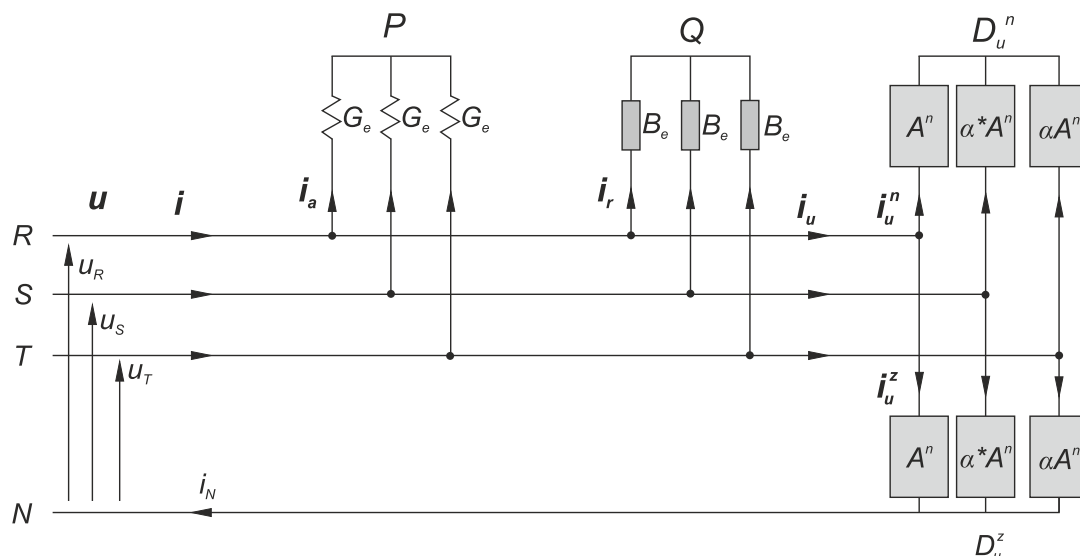
zaś zespolona wartość skuteczna prądu niezrównoważonego kolejności zerowej w linii S może być przedstawiona w postaci

$$\mathbf{I}_{Su}^z = \mathbf{A}^z \mathbf{U}_R = \mathbf{A}^z \alpha \mathbf{U}_S = (\alpha \mathbf{A}^z) \mathbf{U}_S, \quad (31)$$

natomiast w linii T, w postaci:

$$\mathbf{I}_{Tu}^z = \mathbf{A}^z \mathbf{U}_R = \mathbf{A}^z \alpha^* \mathbf{U}_T = (\alpha^* \mathbf{A}^z) \mathbf{U}_T. \quad (32)$$

Powyższe zależności pozwalają zilustrować rozkład (24) obwodem zastępczym odbiornika niezrównoważonego, pokazanym na rys. 4.



Rys. 4. Odbiornik równoważny odbiornikowi niezrównoważonemu Fig. 4. Equivalent circuit of unbalanced load

Trójfazowe wartości skuteczne składowych fizycznych prądu mają odpowiednio postać:

$$\|\mathbf{i}_a\| = G_e \|\mathbf{u}\|, \quad \|\mathbf{i}_r\| = |B_e| \|\mathbf{u}\|, \quad \|\mathbf{i}_u^n\| = A^n \|\mathbf{u}\|, \quad \|\mathbf{i}_u^z\| = A^z \|\mathbf{u}\|. \quad (33)$$

Mogą być one określone przez parametry równoważne odbiornika, to jest konduktancję równoważną G_e , susceptancję równoważną B_e i moduły admittancji niezrównoważenia A^n oraz A^z .

Składowe fizyczne prądu zasilania w rozkładzie (24) są wzajemnie ortogonalne. Składowa czynna i składowa bierna są ortogonalne ze względu na ich wzajemne przesunięcie o ćwierć okresu. Obie te składowe są prądami kolejności dodatniej, a więc są ortogonalne względem obu prądów niezrównoważenia. Oba prądy niezrównoważenia, kolejności ujemnej i kolejności zerowej są wzajemnie ortogonalne, gdyż są prądami o odmiennej kolejności. Wartości skuteczne składowych fizycznych prądu zasilania odbiornika niezrównoważonego w układzie z przewodem zerowym spełniają więc zależność:

$$\|\mathbf{i}\|^2 = \|\mathbf{i}_a\|^2 + \|\mathbf{i}_r\|^2 + \|\mathbf{i}_u^n\|^2 + \|\mathbf{i}_u^z\|^2. \quad (34)$$

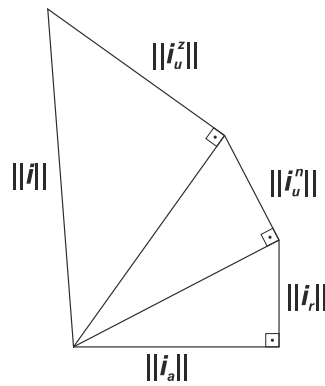
Zależność tę można zilustrować wielokątem przedstawionym na rys. 5, którego boki mają długość proporcjonalną do trójfazowych wartości skutecznych składowych fizycznych prądu odbiornika.

Przedstawiony rozkład prądu na składowe fizyczne odnosi się do prądów fazowych. Prąd w przewodzie zerowym jest potrójnym prądem niezrównoważenia kolejności zerowej, mianowicie:

$$\mathbf{i}_N = 3\mathbf{i}_{Ru}^z = 3\sqrt{2} \operatorname{Re}\{\mathbf{I}_u^z e^{j\omega t}\} = 3\sqrt{2} \operatorname{Re}\{\mathbf{1}^z \mathbf{A}^z \mathbf{U}_R e^{j\omega t}\}, \quad (35)$$

a jego wartość skuteczna:

$$\|i_N\| = \sqrt{3} A^z \|\mathbf{u}\|. \quad (36)$$



Rys. 5. Wielobok wartości skutecznych składowych fizycznych prądu odbiornika niezrównoważonego
Fig. 5. Diagram of three-phase rms values of CPC

Mnożąc równanie (34) przez kwadrat trójfazowej wartości skutecznej napięcia zasilania $\|\mathbf{u}\|$ otrzymuje się równanie mocy niezrównoważonego odbiornika trójfazowego z przewodem zerowym:

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D_u^n^2 + D_u^z^2. \quad (37)$$

W równaniu tym

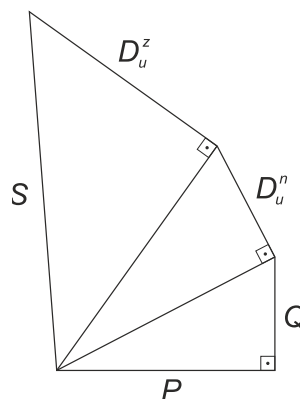
$$D_u^n \stackrel{\text{df}}{=} \|\mathbf{i}_u^n\| \|\mathbf{u}\| = A^n \|\mathbf{u}\|^2 \quad (38)$$

jest mocą **niezrównoważenia kolejności ujemnej** oraz

$$D_u^z \stackrel{\text{df}}{=} \|\mathbf{i}_u^z\| \|\mathbf{u}\| = A^z \|\mathbf{u}\|^2 \quad (39)$$

jest **mocą niezrównoważenia kolejności zerowej**.

Otrzymane równanie mocy (37) jest całkowicie różne od powszechnie używanego równania. Moc pozorna w tym równaniu nie jest zdefiniowana jako moc arytmetyczna lub moc geometryczna, a ponadto oprócz mocy czynnej i mocy biernej są w tym równaniu dwie nowe moce, związane z generowaniem przez niezrównoważenie odbiornika prądu symetrycznego kolejności ujemnej oraz/lub prądu kolejności zerowej. Moce te są miarą oddziaływania tych prądów na moc pozorną odbiornika. Oddziaływanie tych mocy na moc pozorną odbiornika S można zilustrować wielokątem pokazanym na rys. 6.



Rys. 6. Wielobok mocy odbiornika niezrównoważonego Fig. 6. Diagram of powers of unbalanced load

Z równania tego wynika, że na wartość współczynnika mocy λ odbiornika oddziałują w takim samym stopniu moc bierna Q co obie moce niezrównoważenia, gdyż:

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + D_u^n^2 + D_u^z^2}}. \quad (40)$$

Poprawa tego współczynnika na drodze kompensacji polega w istocie na redukcji, przy zachowaniu prądu czynnego, tych składowych prądu zasilania, które nie są stowarzyszone z trwałym przenoszeniem energii ze źródła do odbiornika. Jest to widoczne szczególnie wyraźnie, gdy współczynnik mocy przedstawi się w postaci

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{\|\mathbf{i}_a\|}{\|\mathbf{i}\|} = \frac{\|\mathbf{i}_a\|}{\sqrt{\|\mathbf{i}_a\|^2 + \|\mathbf{i}_r\|^2 + \|\mathbf{i}_u^n\|^2 + \|\mathbf{i}_u^z\|^2}}. \quad (41)$$

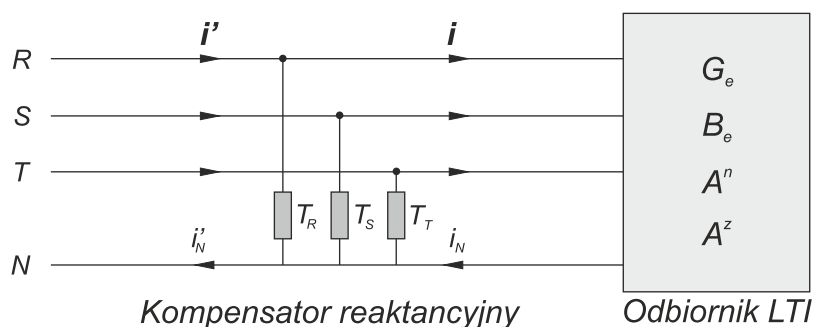
Problem kompensacji reaktancyjnej można sprowadzić do modyfikacji admitancji widzianej z zacisków źródła zasilania, gdyż współczynnik mocy może być wyrażony poprzez parametry odbiornika, mianowicie

$$\lambda = \frac{\|\mathbf{i}_a\|}{\|\mathbf{i}\|} = \frac{G_e}{\sqrt{G_e^2 + B_e^2 + A^n^2 + A^z^2}}. \quad (42)$$

Wzór ten podkreśla fakt, że współczynnik mocy nie zależy od napięć czy prądów, lecz wyłącznie od parametrów odbiornika, to jest jego konduktancji i susceptancji równoważnej oraz admitancji niezrównoważenia kolejności ujemnej i zerowej.

3. KOMPENSACJA REAKTANCYJNA

Kompensator reaktancyjny może być zbudowany z elementów reaktancyjnych włączonych pomiędzy fazami układu trójfazowego, to jest o strukturze Δ lub/ oraz połączonych z przewodem neutralnym, to jest o strukturze Y. Ponieważ kompensator o strukturze Δ nie może kompensować prądu w przewodzie neutralnym, przyjmijmy, że ma on strukturę Y, to znaczy jest włączony tak, jak na rys. 7.



Rys. 7. Odbiornik trójfazowy z kompensatorem reaktancyjnym Fig. 7. Three-phase load with reactive compensator in Y structure

Przyjmijmy, że kompensator zbudowany jest z trzech bezstratnych elementów reaktancyjnych o susceptancjach T_R , T_S and T_T . Kompensator taki redukuje składową kolejności ujemnej prądu zasilania \mathbf{i}_u^n do zera jeśli, jego susceptancje spełniają warunek

$$\frac{1}{3}j(T_R + \alpha T_S + \alpha^* T_T) + A^n = 0 \quad (43)$$

oraz redukuje składową kolejności zerowej prądu zasilania \mathbf{i}_u^z do zera jeśli jego susceptancje spełniają warunek

$$\frac{1}{3}j(T_R + \alpha^* T_S + \alpha T_T) + A^z = 0. \quad (44)$$

Jeśli ponadto, wraz poprzednimi prądami, kompensator ma zredukować do zera składową bierną prądu źródła, to susceptancje te muszą spełniać warunek:

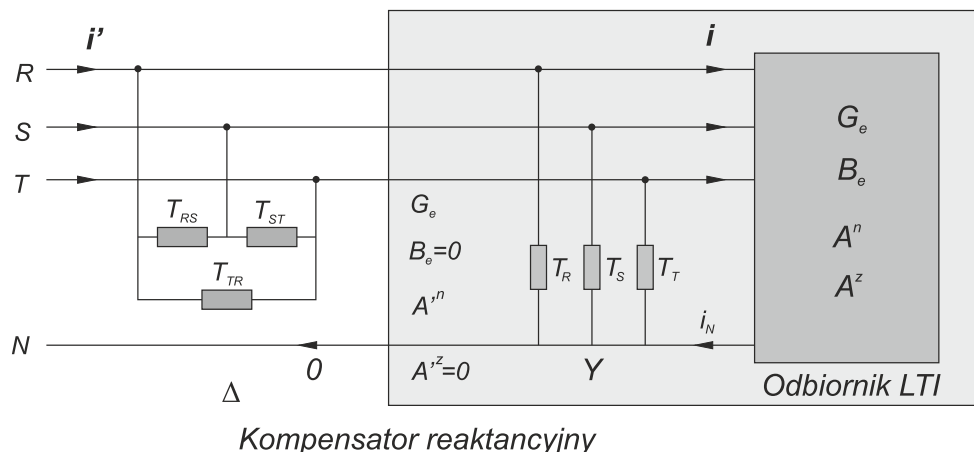
$$\frac{1}{3}(T_R + T_S + T_T) + B_e = 0. \quad (45)$$

Każde z równań (43) i (44) ma współczynniki zespolone, zatem musi być spełnione, osobno, dla części rzeczywistej i dla części urojonej. Każde z nich jest równoważne dwóm równaniom. Łączna liczba równań wynikających z warunków (43) – (45) wynosi zatem pięć, a więc układ ten nie posiada rozwiązania ze względu na trzy niewiadome susceptancje T_R , T_S oraz T_T . Kompensator przedstawiony na rysunku 7 może kompensować tylko składową kolejności zerowej prądu zasilania \mathbf{i}_u^z oraz prąd bierny \mathbf{i}_r .

Rozwiązując równania (44) i (45), otrzymuje się susceptancje takiego kompensatora. Mianowicie:

$$\begin{aligned} T_R &= -2\text{Im}A^z - B_e, \\ T_S &= -\sqrt{3}\text{Re}A^z + \text{Im}A^z - B_e, \\ T_T &= \sqrt{3}\text{Re}A^z + \text{Im}A^z - B_e. \end{aligned} \quad (46)$$

Osobny kompensator jest potrzebny do redukcji składową kolejności ujemnej i_U^n . Kompensator ten nie może oczywiście mieć elementów połączonych z przewodem neutralnym, gdyż byłby to kompensator modyfikujący tylko parametry pierwszego kompensatora. Może on mieć strukturę Δ , jak to pokazuje rysunek 8.



Rys. 8. Ogólna struktura kompensatora równoważącego Fig. 8. General structure of the reactive balancing compensator

Moc bierna odbiornika nie musi być kompensowana przez kompensator Y. Może być ona kompensowana przez kompensator Δ lub przez oba. Susceptancje kompensatora Y kompensującego tylko składową zerową prądu muszą spełniać jedynie równanie (44). Jedna z tych susceptancji może mieć dowolną wartość, w szczególności zero, co zmniejsza liczbę elementów kompensatora do dwóch.

Kompensator Y zmienia admitancję równoważną i admitancje niezrównoważenia obserwowane z zacisków źródła zasilania. Jeśli przyjmiemy, że kompensator Y kompensuje całkowicie prąd bierny i składową zerową prądu, a więc ma susceptancje określone wzorami (46), to jego admitancja niezrównoważenia kolejności ujemnej:

$$\begin{aligned} A_C^n &= \frac{1}{3} j (T_R + \alpha T_S + \alpha^* T_T) = \\ &= \frac{1}{3} j [(-2 \operatorname{Im} A^z - B_e) + \alpha (-\sqrt{3} \operatorname{Re} A^z + \operatorname{Im} A^z - B_e) + \alpha^* (\sqrt{3} \operatorname{Re} A^z + \operatorname{Im} A^z - B_e)] = \\ &= \operatorname{Re} A^z - j \operatorname{Im} A^z = A^{z*}. \end{aligned} \quad (48)$$

Admitancja niezrównoważenia kolejności ujemnej obserwowana z zacisków źródła zasilania zmieniana jest przez kompensator Y do wartości

$$A'^n = A_C^n + A^n = A^{z*} + A^n, \quad (48)$$

zaś składowa ujemna prądu niezrównoważenia ma wtedy przebieg

$$i_u'^n = \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{1}^n (A_C^n + A^n) U_R e^{j\omega t} \} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{1}^n A'^n U_R e^{j\omega t} \}. \quad (49)$$

Obliczanie susceptancji kompensatorów o strukturze Δ w układach trójprzewodowych było przedmiotem artykułu [7]. Susceptancje międzyfazowe T_{RS} , T_{ST} i T_{TR} kompensatora kompensującego całkowicie składową ujemną prądu zasilania muszą spełniać warunki:

$$-(jT_{ST} + \alpha jT_{TR} + \alpha^* jT_{RS}) + A'^n = 0, \quad (50)$$

$$T_{RS} + T_{ST} + T_{TR} = 0. \quad (51)$$

Rozwiązaniem tych równań są susceptancje:

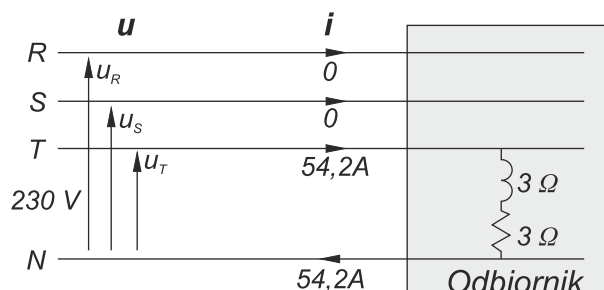
$$T_{RS} = (\sqrt{3} \operatorname{Re} A'^n - \operatorname{Im} A'^n) / 3, \quad (52)$$

$$T_{ST} = (2 \operatorname{Im} A'^n) / 3,$$

$$T_{TR} = (-\sqrt{3} \operatorname{Re} A'^n - \operatorname{Im} A'^n) / 3.$$

Ogólna struktura kompensatora reaktancyjnego pokazana na rys. 8 nie jest jedyną. Kompensatory Y i Δ mogą być przestawione, a oprócz tego moc bierna może być kompensowana przez każdy z nich. Ma to oczywiście wpływ na susceptancje kompensatora.

Przykład liczbowy. Obliczmy parametry kompensatora równoważącego odbiornik pokazany na rysunku 9, przyjmując, że jest zasilany ze źródła sinusoidalnego napięcia symetrycznego o wartości skutecznej względem przewodu neutralnego $U = 230$ V.



Rys. 9. Trójfazowy odbiornik niezrównoważony Fig. 9. Three-phase unbalanced load

Admitancja równoważna odbiornika:

$$Y_e = G_e + jB_e = \frac{1}{3}(Y_R + Y_S + Y_T) = \frac{1}{3} \frac{1}{3 + j3} = 0,0556 - j0,0556 \text{ S}$$

zaś admitancje niezrównoważenia:

$$A^n = \frac{1}{3}(Y_R + \alpha Y_S + \alpha^* Y_T) = \frac{1}{3} \alpha^* Y_T = \frac{1}{3} \alpha^* \frac{1}{3 + j3} = 0,0787 e^{-j165^\circ} = -0,0760 - j0,0204 \text{ S},$$

$$A^z = \frac{1}{3}(Y_R + \alpha^* Y_S + \alpha Y_T) = \frac{1}{3} \alpha Y_T = \frac{1}{3} \alpha \frac{1}{3 + j3} = 0,0787 e^{j75^\circ} = 0,0204 + j0,0760 \text{ S}.$$

Ponieważ trójfazowa wartość skuteczna napięcia zasilania:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{3} U_R = \sqrt{3} \times 230 = 398,4 \text{ V},$$

zatem wartości skuteczne składowych fizycznych prądu odbiornika wynoszą odpowiednio:

$$\|\mathbf{i}_a\| = G_e \|\mathbf{u}\| = 0,0556 \times 398,4 = 22,1 \text{ A}, \quad \|\mathbf{i}_r\| = |B_e| \|\mathbf{u}\| = 0,0556 \times 398,4 = 22,1 \text{ A},$$

$$\|\mathbf{i}_u^n\| = A^n \|\mathbf{u}\| = 0,787 \times 398,4 = 31,3 \text{ A}, \quad \|\mathbf{i}_u^z\| = A^z \|\mathbf{u}\| = 0,787 \times 398,4 = 31,3 \text{ A}.$$

Trójfazowa wartość skuteczna prądu zasilania ma więc postać:

$$\|\mathbf{i}\| = \sqrt{\|\mathbf{i}_a\|^2 + \|\mathbf{i}_r\|^2 + \|\mathbf{i}_u^n\|^2 + \|\mathbf{i}_u^z\|^2} = 54,2 \text{ A}.$$

Współczynnik mocy takiego odbiornika:

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{\|\mathbf{i}_a\|}{\|\mathbf{i}\|} = 0,41.$$

Susceptancje kompensatora o strukturze Y mają wartości:

$$T_R = -2 \operatorname{Im} A^z - B_e = -0,0963 \text{ S},$$

$$T_S = -\sqrt{3} \operatorname{Re} A^z + \operatorname{Im} A^z - B_e = 0,0963 \text{ S},$$

$$T_T = \sqrt{3} \operatorname{Re} A^z + \operatorname{Im} A^z - B_e = 0,167 \text{ S}.$$

Ponieważ susceptancja T_R jest ujemna, gałąź R kompensatora powinna być gałęzią indukcyjną o reaktancji

$$X_R = -\frac{1}{T_R} = 10,38 \Omega.$$

Pozostałe dwie susceptancje są dodatnie, odpowiednie gałęzie powinny być więc pojemnościowe.

Kompensator ten zmienia admitancję niezrównoważenia kolejności ujemnej obserwowaną z zacisków źródła zasilania do wartości:

$$A'^n = A^{z*} + A^n = (0,0204 + j0,0760)^* + (-0,0760 - j0,0204) = -0,0556 - j0,0964 \text{ S},$$

zatem susceptancje międzyfazowe kompensatora Δ obliczone ze wzoru (52) mają wartości:

$$T_{RS} = (\sqrt{3} \operatorname{Re} A'^n - \operatorname{Im} A'^n) / 3 = 0 ,$$

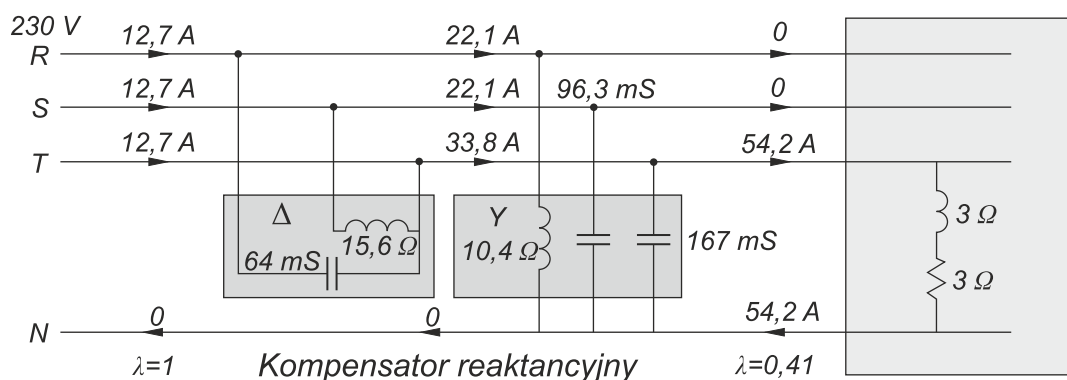
$$T_{ST} = (2 \operatorname{Im} A'^n) / 3 = -0,064 \text{ S} ,$$

$$T_{TR} = (-\sqrt{3} \operatorname{Re} A'^n - \operatorname{Im} A'^n) / 3 = 0,064 \text{ S} .$$

Ponieważ susceptancja T_{ST} jest ujemna, gałąź ST kompensatora powinna być gałęzią indukcyjną o reaktancji

$$X_{ST} = -\frac{1}{T_{ST}} = 15,6 \Omega .$$

Pozostała gałąź powinna być gałęzią pojemnościową. Kompensator oraz wyniki kompensacji pokazane są na rys. 10.



Rys. 10. Przykład kompensatora reaktancyjnego Fig. 10. Example of reactive compensator

4. PODSUMOWANIE

Artykuł pokazuje, jak można opisać właściwości energetyczne liniowego, lecz niezrównoważonego odbiornika trójfazowego zasilanego symetrycznym napięciem sinusoidalnym. Wyprowadzony rozkład prądu zasilania na składowe fizyczne, równanie mocy i definicje dwóch mocy niezrównoważenia usuwają poważny brak elektrotechniki, odnośnie do możliwości opisu takich układów. Wyprowadzone równanie mocy i ich definicje tworzą podstawę do projektowania balansujących kompensatorów reaktancyjnych. Liczne zagadnienia pojawiające się przy projektowaniu i budowie takich kompensatorów w konkretnych sytuacjach energetycznych wychodzą jednak poza zakres tego artykułu. Jednym z głównych zagadnień może być zdolność dopasowywania się kompensatora do zwykle zmieniających się parametrów obciążenia, czyli projektowanie kompensatorów adaptacyjnych.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Ch. P. Steinmetz, (1917) "Theory and calculation of electrical apparatus", McGraw-Hill Book Comp., New York
- [2] L. S. Czarnecki, (1988) "Orthogonal decomposition of the current in a three-phase non-linear asymmetrical circuits with nonsinusoidal voltage", *IEEE Trans. Instrum. and Measur.*, IM-37, no. 1, pp. 30-34.
- [3] L. S. Czarnecki, (1999) "Energy flow and power phenomena in electrical circuits: illusions and reality", *Archiv für Elektrotechnik*, (82), no. 4, pp. 10-15.
- [4] L. S. Czarnecki, (2005) "Moce w Obwodach Elektrycznych z Niesinusoidalnymi Przebiegami Prądów i Napięć", *Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej*.
- [5] A. Firlit, (2010) "Teorie mocy w obwodach prądu zmiennego", *AUTOMATYKA, ELEKTRYKA, ZAKŁÓCENIA*, <http://www.epismo-aez.pl>, vol. 1, No. 1, pp. 46-56.
- [6] L. S. Czarnecki, (2010) "Powers and compensation in circuits with nonsinusoidal voltages and currents, Part 1. Problems overview", *AUTOMATYKA, ELEKTRYKA, ZAKŁÓCENIA*, (Control, Electrical Engineering, Disturbances), <http://www.epismo-aez.pl>, vol. 1, 2010, No. 1, pp. 57-65.
- [7] L. S. Czarnecki, (2011) "Powers and compensation in circuits with nonsinusoidal voltages and currents, Part 4. Current's Physical Components and compensation three-phase unbalanced systems in sinusoidal conditions", *On-line Journal: AUTOMATYKA, ELEKTRYKA, ZAKŁÓCENIA*, <http://www.epismo-aez.pl>, vol. 1, no. 4, pp. 57-65.

MIEJSCE NA REKLAMĘ

