

Automatyka-Elektryka-Zakłócenia

MOCE I KOMPENSACJA W OBWODACH Z ODKSZTAŁCONYMI I NIESYMETRYCZNYMI PRZEBIEGAMI PRĄDU I NAPIĘCIA

Część 8. Moce i kompensacja obwodów z niesymetrycznym napięciem zasilania

Leszek S. CZARNECKI, Life Fellow IEEE, A. M. Lopez Distinguished Professor, Prashanna BHATTARAI, IEEE Student Member
Louisiana State University, USA

Odbiorniki trójfazowe są niekiedy zasilane napięciem niesymetrycznym, jednak obecny stan rozwoju elektrotechniki nie pozwala opisywać takich odbiorników równaniem mocy, to jest relacją wiążącą wszystkie moce odbiornika. Można to obecnie robić tylko w sposób przybliżony, przyjmując, że napięcie zasilania jest symetryczne. Uniemożliwia to także projektowanie kompensatorów reaktancyjnych, redukujących moc bierną i moc niezrównoważenia w warunkach zasilania napięciem niesymetrycznym. Przedmiotem niniejszego artykułu jest eliminacja tego ograniczenia elektrotechniki, poprzez wyprowadzenie równania mocy odbiorników trójfazowych zasilanych napięciem niesymetrycznym oraz przedstawienie podstaw konstrukcji kompensatorów reaktancyjnych odbiorników pracujących w takich właśnie warunkach.

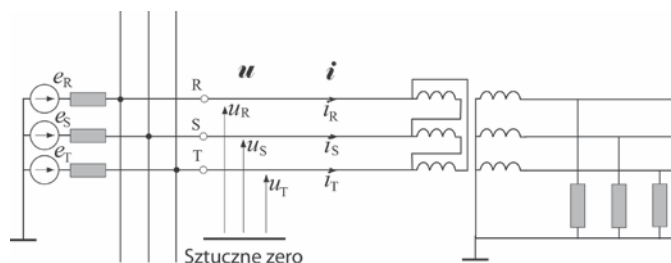
POWERS AND COMPENSATION IN SYSTEMS WITH NONSINUSOIDAL VOLTAGES AND CURRENTS

Part 8. Powers and reactive compensation at asymmetrical supply voltage

Three-phase loads are sometimes supplied with asymmetrical voltage, however, the present state of electrical engineering does not allow for describing them with a power equation, meaning with a relationship between all powers. It can be done only at the assumption that the supply voltage is symmetrical. It makes impossible of designing reactive compensators for the reactive power and the unbalanced power compensation for the load balancing. The development of the power equation of loads with asymmetrical supply voltage and fundamentals of reactive compensation of such loads is the subject of this paper.

1. WPROWADZENIE

Odbiorniki energii w sieciach mieszkaniowych czy w dużych budynkach różnego przeznaczenia są w dominującej liczbie odbiornikami jednofazowymi. Tworzą one jednofazowe agregaty zasilane poprzez transformatory trójfazowe o konfiguracji Δ/Y , tak jak jest to pokazane na Rys. 1.



Rys.1. Agregaty odbiorników jednofazowych zasilanych przez transformator o konfiguracji Δ/Y .

Taką samą strukturę mają sieci trakcyjne czy obwody zasilania trójfazowych pieców łukowych prądu zmiennego. Wspólną cechą takich odbiorników jest pewien poziom niezrównoważenia. Niezrównoważenie to może być szczególnie wysokie w sieciach trakcyjnych oraz w obwodach zasilania pieców łukowych. Napęd trakcyjny jest odbiornikiem jednofazowym, podobnie jak i łuk elektryczny.

Punkt rozliczeniowy między dostawcą energii a użytkownikiem takiej sieci dystrybucyjnej jest często zlokalizowany po pierwotnej stronie transformatora. Z punktu widzenia dostawcy, odbiornik energii jest odbiornikiem trójfazowym zasilanym trójprzewodowo.

Teoria mocy, na obecnym poziomie jej rozwoju, pozwala opisywać takie odbiorniki równaniem mocy, wiążącym wzajemnie wszystkie moce odbiornika, pod warunkiem, że napięcie zasilania jest napięciem symetrycznym. Napięcie to ma zwykle wysoki poziom symetrii, z dokładnością do pojedynczych procentów. Niemniej, może być ono niesymetryczne. Opis energetyczny odbiornika wymaga obecnie w takim przypadku założenia, że napięcie zasilania jest symetryczne, a więc opis energetyczny może być tylko opisem przybliżonym. Niestety, błędu takiej aproksymacji nie da się nawet oszacować, jeśli nie zna się opisu energetycznego odbiornika w warunkach zasilania napięciem niesymetrycznym. Dotyczy to przede wszystkim dokładności pomiarów mocy oraz współczynnika mocy takich odbiorników. Osobnym zagadnieniem jest kompensacja reaktancyjna odbiorników, w celu redukcji jego

mocy biernej i równoważenia. Obliczanie parametrów kompensatora wymaga obecnie założenia [2, 3], że zasilany jest on napięciem symetrycznym. Nie wiadomo jednak jak asymetria zasilania może wpływać na skuteczność kompensacji, ani jak obliczać parametry kompensatora.

Niemożliwość opisu energetycznego odbiorników przy niesymetrycznym napięciu zasilania jest niewątpliwym brakiem teorii mocy na obecnym poziomie jej rozwoju. Celem niniejszego artykułu jest usunięcie tego braku, a także przedstawienie podstaw kompensacji reaktancyjnej w warunkach asymetrii napięcia zasilania.

2. SKŁADOWE FIZYCZNE PRĄDU ODBIORNIKA ZASILANEGO NAPIĘCIEM NIESYMETRYCZNYM

Odbiorniki energii są często nieliniowe, niestacjonarne zaś napięcie zasilania jest niesinusoidalne. Trudności z opisem właściwości energetycznych odbiorników zasilanych napięciem niesymetrycznym pojawiają się już jednak nawet wtedy, gdy odbiorniki te są liniowe o niezmiennych w czasie parametrach, to jest kategorii LTI (ang.: linear time-invariant), a napięcie jest sinusoidalne. Aby trudności te usunąć, przyjmuje się w tym artykule, że analizowany obwód składa się wyłącznie z odbiorników LTI, zaś napięcie zasilania jest sinusoidalne.

Napięcie źródłowe systemu rozdzielczego może być określane jako wektor trójfazowy, którego elementami są napięcia na zaciskach R, S, T, mianowicie $\mathbf{e} = [e_R, e_S, e_T]^T$. Napięcie to, jako niesymetryczne, może mieć składowe symetryczne kolejności dodatniej, ujemnej oraz zerowej \mathbf{e}^p , \mathbf{e}^n oraz \mathbf{e}^z . (Składową kolejności dodatniej nazywa się też składową kolejności zgodnej, a kolejności ujemnej nazywa się też składową kolejności przeciwnej). Składowa napięcia kolejności zerowej nie może w układzie trójprzewodowym powodować przepływu prądu, a jednocześnie powiększa ona trójfazową wartość skuteczną tego napięcia $\|\mathbf{e}\|$. W tej sytuacji, nawet zrównoważony odbiornik czysto rezystancyjny miałby współczynnik mocy, $\lambda = P/S$, mniejszy od jedności, co byłoby wnioskiem błędnym. Aby tego uniknąć, składowa zerowa musi być usunięta z energetycznego opisu odbiornika, a także z pomiaru mocy na jego zaciskach. W tym celu napięcia linii muszą być mierzone względem sztucznego zera, tak jak jest to pokazane na Rys. 1. Napięcie takie, określone wektorem $\mathbf{u} = [u_R, u_S, u_T]^T$, posiada wtedy wyłącznie składowe kolejności dodatniej i ujemnej, $\mathbf{u} = \mathbf{u}^p + \mathbf{u}^n$. Napięcie i prąd mogą być przedstawione w postaci

$$\mathbf{u}(t) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{bmatrix} u_R(t) \\ u_S(t) \\ u_T(t) \end{bmatrix} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left\{ \begin{bmatrix} U_R \\ U_S \\ U_T \end{bmatrix} e^{j\omega t} \right\} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{U} e^{j\omega t} \}, \quad \mathbf{i}(t) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{bmatrix} i_R(t) \\ i_S(t) \\ i_T(t) \end{bmatrix} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left\{ \begin{bmatrix} I_R \\ I_S \\ I_T \end{bmatrix} e^{j\omega t} \right\} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{I} e^{j\omega t} \}. \quad (1)$$

Wielkości U_R, U_S, U_T oraz I_R, I_S, I_T są zespolonymi wartościami skutecznymi, (ang.: complex rms - crms) napięć zasilania i prądów liniowych odbiornika.

Przed przedstawioną w niniejszym artykule analizą zachodzi potrzeba pewnego uporządkowania symboli. Mianowicie, moc pozorną oznacza się powszechnie symbolem S . Jednocześnie, wielkość

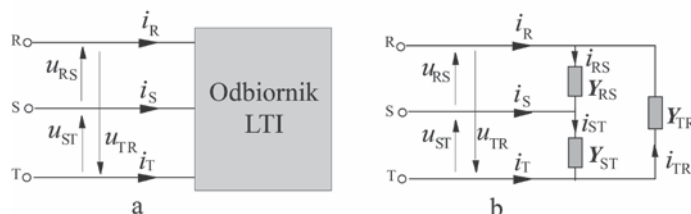
$$P + jQ = \mathbf{U}^T \mathbf{I}^* = S \quad (2)$$

nazywa się zespoloną mocą pozorną, przyjmując, że jej moduł S jest mocą pozorną. Niestety, wniosek taki jest poprawny pod warunkiem, że napięcia i prądy odbiornika są symetryczne i sinusoidalne. Wtedy, gdy któryś z tych warunków nie jest spełniony, wówczas moc pozorną S nie jest równa modułowi zespolonej mocy pozornej S , tymczasem podobieństwo symboli S i S oraz nazwa "zespolona moc pozorną" sugerują, że moc pozorną S jest modułem zespolonej mocy pozornej S , co może nie być prawdą. Ponieważ symbol mocy pozornej S jest o wiele częściej używany w elektrotechnice niż pojęcie "zespolonej mocy pozornej" oraz jej symbol S , odmienna nazwa i odmienny symbol są przyjęte w tym artykule dla wielkości

$$P + jQ = \mathbf{U}^T \mathbf{I}^* \stackrel{\text{df}}{=} C. \quad (3)$$

Mianowicie, będzie ona nazywana **mocą zespoloną**, lecz nie **pozorną mocą zespoloną**.

Liniowy (LTI) odbiornik zasilany trójprzewodowo, tak jak jest to pokazane na Rys. 2(a), może być równoważny odbiornikowi o strukturze Δ , pokazanemu na Rys. 2(b).

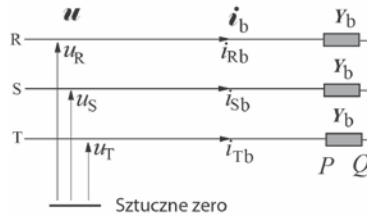


Rys. 2. Liniowy odbiornik trójfazowy (a) i równoważny mu odbiornik o strukturze Δ (b).

Równoważność oznacza, że przy takim samym napięciu zasilania \mathbf{u} oba odbiorniki mają identyczne prądy zasilania a więc i identyczne moce. Co więcej, istnieje nieskończenie wiele takich odbiorników równoważnych, co oznacza, że wartość jednej z admittancej międzyfazowych może mieć dowolną wartość, w szczególności, wartość zerową. Na przykład, przyjmując $Y_{RS} = 0$, odbiornik równoważny ma admittancej

$$Y_{ST} = \frac{I_S}{U_{ST}}, \quad Y_{TR} = -\frac{I_R}{U_{TR}}. \quad (4)$$

Analizowany odbiornik o mocy czynnej P i mocy biernej Q może być odbiornikiem niezrównoważonym, to jest odbiornikiem, który zasilany nawet symetrycznym napięciem, może powodować asymetrię prądową. Dla każdego odbiornika niezrównoważonego można znaleźć odbiornik zrównoważony, równoważny mu ze względu na moc czynną P i moc bierną Q , o strukturze pokazanej na Rys. 3.



Rys. 3. Odbiornik zrównoważony, równoważny odbiornikowi pierwotnemu ze względu na moc czynną i bierną.

Aby był on równoważny obwodowi pierwotnemu ze względu na moc czynną P i moc bierną Q , jego admittancej fazowa musi mieć wartość

$$Y_b = G_b + jB_b = \frac{P - jQ}{\|\mathbf{u}\|^2} = \frac{C^*}{\|\mathbf{u}\|^2} \quad (5)$$

gdzie $\|\mathbf{u}\|$ oznacza trójfazową wartość skuteczną napięcia zasilania, równą

$$\|\mathbf{u}\| \stackrel{\text{df}}{=} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}^T(t) \mathbf{u}(t) dt} = \sqrt{U_R^2 + U_S^2 + U_T^2}. \quad (6)$$

Admittancej Y_b zdefiniowana wzorem (5) będzie nazywana w tym artykule **admittancej równoważną odbiornika zrównoważonego**.

Napięcie zasilania \mathbf{u} może być niesymetryczne, może być zatem przedstawione jako suma napięć kolejności dodatniej i kolejności ujemnej, mianowicie

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^p + \mathbf{u}^n = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{(U^p + U^n) e^{j\omega t}\} = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{\mathbf{1}^p U^p + \mathbf{1}^n U^n\} e^{j\omega t} \quad (7)$$

gdzie U^p oraz U^n są zespolonymi wartościami skutecznymi składowych symetrycznych kolejności dodatniej i kolejności ujemnej, określone przekształceniem Fortesque [1]

$$\begin{bmatrix} U^p \\ U^n \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1, & \alpha, & \alpha^* \\ 1, & \alpha^*, & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_R \\ U_S \\ U_T \end{bmatrix}, \quad \alpha = 1e^{j2\pi/3}, \quad \alpha^* = 1e^{-j2\pi/3} \quad (8)$$

zaś symbole

$$\mathbf{1}^p \stackrel{\text{df}}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^* \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1e^{-j2\pi/3} \\ 1e^{j2\pi/3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{1}^n \stackrel{\text{df}}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1e^{j2\pi/3} \\ 1e^{-j2\pi/3} \end{bmatrix} \quad (9)$$

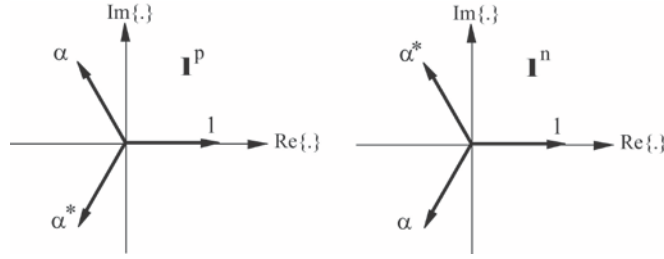
oznaczają jednostkowe wielkości trójfazowe kolejności dodatniej i ujemnej, pokazane na rys. 4.

Odbiornik zrównoważony, równoważny odbiornikowi pierwotnemu, obciąża źródło zasilania prądem czynnym

$$\mathbf{i}_a = G_b \mathbf{u} = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{G_b (U^p + U^n) e^{j\omega t}\} = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{G_b (\mathbf{1}^p U^p + \mathbf{1}^n U^n) e^{j\omega t}\} \quad (10)$$

oraz prądem biernym

$$\mathbf{i}_r = B_b \mathbf{u}(t+T/4) = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{jB_b (U^p + U^n) e^{j\omega t}\} = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{jB_b (\mathbf{1}^p U^p + \mathbf{1}^n U^n) e^{j\omega t}\}. \quad (11)$$



Rys. 4. Jednostkowe wielkości trójfazowe kolejności dodatniej i kolejności ujemnej, \mathbf{I}^p and \mathbf{I}^n .

Trójfazowe wartości skuteczne prądu czynnego i prądu biernego wynoszą, odpowiednio

$$\|\mathbf{i}_a\| = G_a \|\mathbf{u}\| = \frac{P}{\|\mathbf{u}\|}, \quad \|\mathbf{i}_r\| = /B_c \|\mathbf{u}\| = \frac{/Q/}{\|\mathbf{u}\|}. \quad (12)$$

Ponieważ prądy te są proporcjonalne, odpowiednio, do napięcia zasilania i do napięcia zasilania przesuniętego w czasie o ćwierć okresu, mają one zatem dokładnie ten sam stopień asymetrii jak napięcie zasilające. Jednak prąd odbiornika pierwotnego \mathbf{i} , wskutek jego niezrównoważenia, nie musi mieć takiej samej asymetrii jak napięcie zasilające \mathbf{u} . Prąd odbiornika niezrównoważonego może więc posiadać składową

$$\mathbf{i} - (\mathbf{i}_a + \mathbf{i}_r) = \mathbf{i} - \mathbf{i}_b \stackrel{\text{df}}{=} \mathbf{i}_u \quad (13)$$

zwaną **prądem niezrównoważenia**. Ma ona przebieg

$$\mathbf{i}_u = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{I_u e^{j\omega t}\} = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{(I - I_b) e^{j\omega t}\} = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{(I - Y_b U) e^{j\omega t}\}. \quad (14)$$

Po nieznaczących przekształceniach wyrażenia (13), otrzymujemy

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_a + \mathbf{i}_r + \mathbf{i}_u \quad (15)$$

co oznacza, że prąd odbiornika jest sumą prądu czynnego, prądu biernego oraz prądu niezrównoważenia. Każdy z tych prądów jest stowarzyszony z odmiennym zjawiskiem fizycznym. Prąd czynny \mathbf{i}_a jest stowarzyszony z trwałym przepływem energii ze źródła do odbiornika. Prąd bierny \mathbf{i}_r jest stowarzyszony z przesunięciem prądu odbiornika względem napięcia zasilania. Prąd niezrównoważenia \mathbf{i}_u jest skutkiem asymetrii prądów, powodowanej niezrównoważeniem odbiornika. Ze względu na jednoznaczne stowarzyszenie tych prądów z osobnymi zjawiskami fizycznymi w obwodzie, mogą być one traktowane jako **Składowe Fizyczne Prądów** odbiornika (ang.: Currents' Physical Components - CPC).

Trójfazowe wartości skuteczne składowych prądu odbiornika spełniają relację

$$\|\mathbf{i}\|^2 = \|\mathbf{i}_a\|^2 + \|\mathbf{i}_r\|^2 + \|\mathbf{i}_u\|^2 \quad (16)$$

pod warunkiem, że są wzajemnie ortogonalne.

Dwa wektory trójfazowe $\mathbf{x}(t)$ i $\mathbf{y}(t)$ są wzajemnie ortogonalne jeśli ich iloczyn skalarny

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{x}^T(t) \mathbf{y}(t) dt = \operatorname{Re}\{\mathcal{X}^T \mathcal{Y}^*\} \quad (17)$$

jest równy zeru. Prąd czynny i prąd bierny są wzajemnie ortogonalne, gdyż są wzajemnie przesunięte o ćwierć okresu. Niejasna pozostaje jedynie ortogonalność tych prądów, lub ich sumy \mathbf{i}_b , do prądu niezrównoważenia. Aby sprawdzić ich ortogonalność, trzeba obliczyć wartość ich iloczynu skalarnego, mianowicie

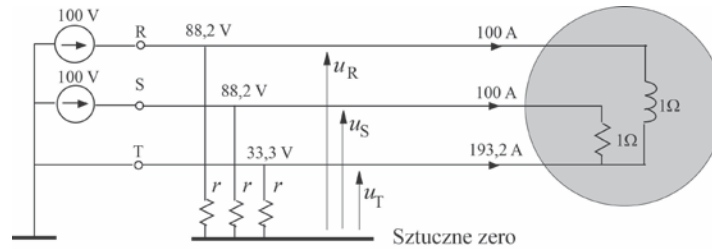
$$\begin{aligned} (\mathbf{i}_b, \mathbf{i}_u) &= \operatorname{Re}\{I_b^T (I - I_b)^*\} = \operatorname{Re}\{Y_b U^T I^* - Y_b U^T Y_b^* U^*\} \\ &= \operatorname{Re}\{Y_b (U^T I^* - U^T Y_b^* U^*)\} = \operatorname{Re}\{Y_b (C - C_b)\} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Iloczyn ten jest równy zeru gdyż odbiornik zrównoważony o admitancji Y_b jest równoważny odbiornikowi pierwotnemu ze względu na moc czynną P i moc bierną Q , a więc moce zespolone tych dwóch odbiorników C oraz C_b są sobie równe. Tak więc, relacja (16) wiążąca wartości skuteczne jest poprawna. Pozwala ona wyznaczyć trójfazową wartość skuteczną prądu niezrównoważenia, mianowicie

$$\|\mathbf{i}_u\| = \sqrt{\|\mathbf{i}\|^2 - (\|\mathbf{i}_a\|^2 + \|\mathbf{i}_r\|^2)}. \quad (19)$$

Przykład liczbowy 1. Zilustrujmy powyższy rozkład analizą obwodu z mocno nie zrównoważonym odbiornikiem zasilanym mocno niesymetrycznym napięciem. Sytuację taką, jak w poniższym przykładzie, rzadko można spotkać w systemach rozdzielczych, ale przykład ten ma tylko pokazać, że proponowany rozkład jest poprawny, niezależnie od stopnia nie zrównoważenia odbiornika i stopnia asymetrii napięciowej.

Przyjmijmy, że odbiornik trójfazowy o strukturze i parametrach pokazanych na Rys. 5 zasilany jest napięciem trójfazowym, w którym napięcie $e_T(t)$ jest stale równe zero. Moc czynna i moc bierna odbiornika w takich warunkach jest równa, odpowiednio, $P = 10,0$ kW and $Q = 10,0$ kvar.



Rys. 5. Przykład odbiornika nie zrównoważonego zasilanego niesymetrycznym napięciem.

Zespolone wartości skuteczne składowych symetrycznych napięcia zasilania wynoszą

$$\begin{bmatrix} U^p \\ U^n \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1, & \alpha, & \alpha^* \\ 1, & \alpha^*, & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 100e^{-j120^\circ} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66,66 \\ 33,33e^{j60^\circ} \end{bmatrix} \text{ V.}$$

Trójfazowe wartości skuteczne tych składowych są równe, odpowiednio

$$\|\mathbf{u}^p\| = \sqrt{3} U^p = \sqrt{3} \times 66,66 = 115,47 \text{ V}, \quad \|\mathbf{u}^n\| = \sqrt{3} U^n = \sqrt{3} \times 33,33 = 57,73 \text{ V}$$

zatem trójfazowa wartość skuteczna napięcia odbiornika wynosi

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\|\mathbf{u}^p\|^2 + \|\mathbf{u}^n\|^2} = \sqrt{115,47^2 + 57,73^2} = 129,1 \text{ V.}$$

Trójfazowy wektor napięcia odbiornika jest zatem równy

$$\mathbf{U} = \mathbf{1}^p \mathbf{U}^p + \mathbf{1}^n \mathbf{U}^n = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^* \\ \alpha \end{bmatrix} 66,7 + \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^* \end{bmatrix} 33,3e^{j60^\circ} = \begin{bmatrix} 88,2e^{j19,1^\circ} \\ 88,2e^{-j139,1^\circ} \\ 33,3e^{j120^\circ} \end{bmatrix} \text{ V.}$$

Admitancja równoważna odbiornika zrównoważonego wynosi

$$\mathbf{Y}_b = G_b + jB_b = \frac{P - jQ}{\|\mathbf{u}\|^2} = 0,600 - j0,600 \text{ S}$$

zatem wektory trójfazowe prądu czynnego, biernego i prądu nie zrównoważenia są równe, odpowiednio

$$\mathbf{i}_a = \sqrt{2} \text{Re}\{I_a e^{j\omega t}\} = \sqrt{2} \text{Re}\{G_b (\mathbf{1}^p \mathbf{U}^p + \mathbf{1}^n \mathbf{U}^n) e^{j\omega t}\} = \sqrt{2} \text{Re}\left\{ \begin{bmatrix} 52,9e^{j19,1^\circ} \\ 52,9e^{-j139,1^\circ} \\ 20,0e^{j120^\circ} \end{bmatrix} e^{j\omega t} \right\} \text{ A}$$

$$\mathbf{i}_r = \sqrt{2} \text{Re}\{I_r e^{j\omega t}\} = \sqrt{2} \text{Re}\{jB_b (\mathbf{1}^p \mathbf{U}^p + \mathbf{1}^n \mathbf{U}^n) e^{j\omega t}\} = \sqrt{2} \text{Re}\left\{ \begin{bmatrix} 52,9e^{-j70,9^\circ} \\ 52,9e^{j130,9^\circ} \\ 20,0e^{j30^\circ} \end{bmatrix} e^{j\omega t} \right\} \text{ A}$$

$$\mathbf{i}_u = \sqrt{2} \text{Re}\{(I - I_a - I_r) e^{j\omega t}\} = \sqrt{2} \text{Re}\left\{ \begin{bmatrix} 95,2e^{-j135^\circ} \\ 95,2e^{-j75^\circ} \\ 164,9e^{j75^\circ} \end{bmatrix} e^{j\omega t} \right\} \text{ A.}$$

Trójfazowe wartości skuteczne składowych fizycznych prądu wynoszą

$$\|\mathbf{i}_a\| = G_b \|\mathbf{u}\| = 0,60 \times 129,1 = 77,46 \text{ A}, \quad \|\mathbf{i}_r\| = /B_b\| \|\mathbf{u}\| = 0,60 \times 129,1 = 77,46 \text{ A}$$

$$\|\mathbf{i}_u\| = \sqrt{I_{uR}^2 + I_{uS}^2 + I_{uT}^2} = \sqrt{95,2^2 + 95,2^2 + 164,9^2} = 212,9 \text{ A}.$$

Trójfazowa wartość skuteczna prądu zasilania, obliczona bezpośrednio ze znajomości wartości skutecznych prądów w liniach zasilających, wynosi

$$\|\mathbf{i}\| = \sqrt{I_R^2 + I_S^2 + I_T^2} = \sqrt{100^2 + 100^2 + 193,2^2} = 239,4 \text{ A}.$$

Taką samą wartość otrzymuje się z relacji (16)

$$\sqrt{\|\mathbf{i}_a\|^2 + \|\mathbf{i}_r\|^2 + \|\mathbf{i}_u\|^2} = \sqrt{77,46^2 + 77,46^2 + 212,9^2} = 239,4 \text{ A} = \|\mathbf{i}\|$$

co potwierdza liczbową poprawność rozkładu na składowe fizyczne prądów zasilania.

Mnożąc równanie (16) przez kwadrat trójfazowej wartości skutecznej napięcia zasilania

$$\{ \|\mathbf{i}\|^2 = \|\mathbf{i}_a\|^2 + \|\mathbf{i}_r\|^2 + \|\mathbf{i}_u\|^2 \} \times \|\mathbf{u}\|^2$$

otrzymuje się równanie mocy odbiornika z niesymetrycznym napięciem zasilania

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D_u^2. \quad (20)$$

W równaniu tym D_u jest mocą niezrównoważenia odbiornika, równą

$$D_u \stackrel{\text{df}}{=} \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{i}_u\|. \quad (21)$$

3. ADMITANCJE NIEZRÓWNOWAŻENIA

Definicje składowych fizycznych prądów, rozkład prądu (15) czy równanie mocy (20) dostarczają informacji pozwalających zrozumieć fizyczne zjawiska towarzyszące przesyłowi energii. Nie dostarczają one jednak informacji o tym, jak parametry odbiornika wpływają na składowe fizyczne i na poszczególne moce. Podobnie, nie dostarczają one informacji potrzebnych do projektowania kompensatorów reaktancyjnych, poprawiających współczynnik mocy. Potrzebne są do tego relacje między składowymi fizycznymi prądów a parametrami odbiornika lub kompensatora. Przedmiotem tego rozdziału jest właśnie znalezienie tych relacji.

Admitancja równoważna odbiornika zrównoważonego, określona wzorem (5), może być wyrażona poprzez parametry odbiornika i napięcie zasilania, mianowicie

$$\mathbf{Y}_b = G_b + jB_b = \frac{P - jQ}{\|\mathbf{u}\|^2} = \frac{\mathbf{Y}_{RS} U_{RS}^2 + \mathbf{Y}_{ST} U_{ST}^2 + \mathbf{Y}_{TR} U_{TR}^2}{\|\mathbf{u}\|^2}. \quad (22)$$

Wtedy, gdy napięcie zasilania jest symetryczne, wówczas $U_{RS} = U_{ST} = U_{TR} = \|\mathbf{u}\|$. W takiej sytuacji

$$\mathbf{Y}_b = \mathbf{Y}_{RS} + \mathbf{Y}_{ST} + \mathbf{Y}_{TR} \stackrel{\text{df}}{=} \mathbf{Y}_e \quad (23)$$

jest admitancją równoważną odbiornika zasilanego symetrycznie [2, 3]. Różnica tych dwóch admitancji ma postać

$$\mathbf{Y}_d = G_d + jB_d \stackrel{\text{df}}{=} \mathbf{Y}_e - \mathbf{Y}_b = \frac{2a}{1+a^2} [\mathbf{Y}_{ST} \cos \psi + \mathbf{Y}_{TR} \cos(\psi - \frac{2\pi}{3}) + \mathbf{Y}_{RS} \cos(\psi + \frac{2\pi}{3})] \quad (24)$$

gdzie współczynnik a jest modułem zespolonego współczynnika asymetrii napięcia zasilania, mianowicie

$$\mathbf{a} = a e^{j\psi} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{U^n}{U^p} = \frac{U^n e^{j\varphi}}{U^p e^{j\phi}} = \frac{U^n}{U^p} e^{j(\varphi - \phi)}. \quad (25)$$

Zespolona wartość skuteczna prądu w linii R odbiornika wynosi

$$\mathbf{I}_R = \mathbf{Y}_{RS}(U_R - U_S) - \mathbf{Y}_{TR}(U_T - U_R) = \mathbf{Y}_e U_R - (\mathbf{Y}_{ST} U_R + \mathbf{Y}_{TR} U_T + \mathbf{Y}_{RS} U_S) \quad (26)$$

i może być przekształcona do postaci

$$\mathbf{I}_R = \mathbf{Y}_e U_R + \mathbf{A}^p U_R^p + \mathbf{A}^n U_R^n \quad (27)$$

gdzie

$$\mathbf{A}^p \stackrel{\text{df}}{=} -(\mathbf{Y}_{ST} + \alpha \mathbf{Y}_{TR} + \alpha^* \mathbf{Y}_{RS}) \quad \mathbf{A}^n \stackrel{\text{df}}{=} -(\mathbf{Y}_{ST} + \alpha^* \mathbf{Y}_{TR} + \alpha \mathbf{Y}_{RS}) \quad (28)$$

są **admitancjami niezrównoważenia**. Ponieważ $Y_e = Y_b + Y_d$, wyrażenie (27) może być przekształcone do postaci

$$\mathbf{I}_R = (Y_b + Y_d)\mathbf{U}_R + \mathbf{A}^P \mathbf{U}_R^P + \mathbf{A}^N \mathbf{U}_R^N \quad (29)$$

W podobny sposób mogą być wyrażone zespolone wartości skuteczne prądów linii S i T, mianowicie

$$\mathbf{I}_S = (Y_b + Y_d)\mathbf{U}_S + \mathbf{A}^P \mathbf{U}_S^P + \mathbf{A}^N \mathbf{U}_S^N \quad (30)$$

$$\mathbf{I}_T = (Y_b + Y_d)\mathbf{U}_T + \mathbf{A}^P \mathbf{U}_S^P + \mathbf{A}^N \mathbf{U}_S^N. \quad (31)$$

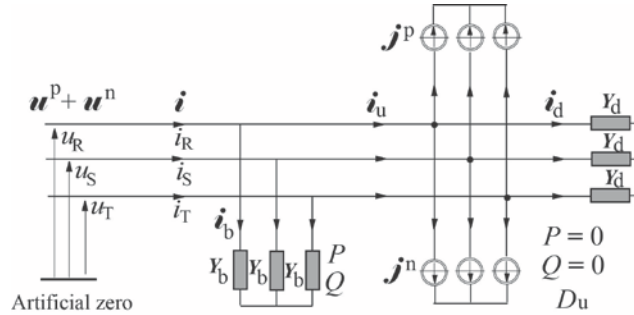
Łącząc (29), (30) oraz (31) w jedno równanie, otrzymujemy wektor trójfazowych wartości skutecznych prądów liniowych odbiornika

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_R \\ \mathbf{I}_S \\ \mathbf{I}_T \end{bmatrix} = Y_b \mathbf{U} + Y_d \mathbf{U} + \mathbf{1}^N \mathbf{A}^P \mathbf{U}^P + \mathbf{1}^P \mathbf{A}^N \mathbf{U}^N = \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_u \quad (32)$$

gdzie

$$\mathbf{I}_u = Y_d \mathbf{U} + \mathbf{1}^N \mathbf{A}^P \mathbf{U}^P + \mathbf{1}^P \mathbf{A}^N \mathbf{U}^N = Y_d \mathbf{U} + \mathcal{J}^N + \mathcal{J}^P \quad (33)$$

Równanie (33) spełnia obwód pokazany na Rys. 6.



Rys 6. Obwód zastępczy odbiornika niezrównoważonego z niesymetrycznym napięciem zasilania.

Źródła prądowe w tym obwodzie \mathcal{J}^n oraz \mathcal{J}^p reprezentują prądy kolejności ujemnej i kolejności dodatniej, proporcjonalne, odpowiednio, do składowej symetrycznej napięcia zasilania kolejności dodatniej U^p i do kolejności ujemnej U^n , o wektorach zespolonych wartości skutecznych

$$\mathcal{J}^n = \mathbf{1}^N \mathbf{A}^P \mathbf{U}^P, \quad \mathcal{J}^p = \mathbf{1}^P \mathbf{A}^N \mathbf{U}^N. \quad (34)$$

Wektor wartości skutecznych prądu niezrównoważenia, określony wzorem (33), może być przekształcony w sposób następujący

$$\mathbf{I}_u = \mathbf{1}^P Y_d \mathbf{U}^P + \mathbf{1}^N Y_d \mathbf{U}^N + \mathbf{1}^N \mathbf{A}^P \mathbf{U}^P + \mathbf{1}^P \mathbf{A}^N \mathbf{U}^N = \mathbf{I}_u^P + \mathbf{I}_u^N \quad (35)$$

gdzie

$$\mathbf{I}_u^P = \mathbf{1}^P (Y_d \mathbf{U}^P + \mathbf{A}^N \mathbf{U}^N) \quad (36)$$

$$\mathbf{I}_u^N = \mathbf{1}^N (Y_d \mathbf{U}^N + \mathbf{A}^P \mathbf{U}^P). \quad (37)$$

Oznacza to że prąd niezrównoważenia ma dwie składowe, mianowicie, prąd niezrównoważenia kolejności dodatniej

$$\mathbf{I}_u^P = \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ I_u^P e^{j\omega t} \} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{1}^P (Y_d \mathbf{U}^P + \mathbf{A}^N \mathbf{U}^N) e^{j\omega t} \} \quad (38)$$

oraz kolejności ujemnej

$$\mathbf{I}_u^N = \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ I_u^N e^{j\omega t} \} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{1}^N (Y_d \mathbf{U}^N + \mathbf{A}^P \mathbf{U}^P) e^{j\omega t} \}. \quad (39)$$

Prąd odbiornika ma więc cztery składowe fizyczne

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_a + \mathbf{i}_r + \mathbf{i}_u^N + \mathbf{i}_u^P. \quad (40)$$

Oba prądy niezrównoważenia, jako prądy przeciwnych kolejności, są wzajemnie ortogonalne, zatem

$$\|\mathbf{i}\|^2 = \|\mathbf{i}_a\|^2 + \|\mathbf{i}_r\|^2 + \|\mathbf{i}_u^P\|^2 + \|\mathbf{i}_u^N\|^2 \quad (41)$$

Równanie mocy odbiornika może więc mieć bardziej szczegółową postać

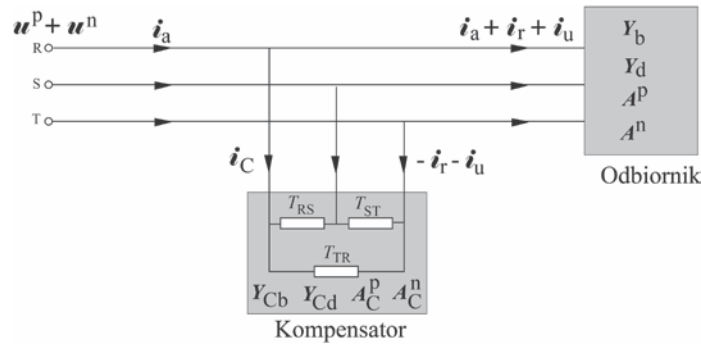
$$S^2 = P^2 + Q^2 + D_u^{p2} + D_u^{n2} \quad (42)$$

gdzie

$$D_u^p \stackrel{\text{df}}{=} \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{i}_u^p\|, \quad D_u^n \stackrel{\text{df}}{=} \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{i}_u^n\|. \quad (43)$$

4. KOMPENSACJA REAKTANCYJNA

Jedyną składową prądu niezbędną do tego, aby odbiornik miał moc P , jest prąd czynny \mathbf{i}_a . Pozostałe prądy, to jest prąd bierny \mathbf{i}_r oraz prąd niezrównoważenia \mathbf{i}_u , powiększają tylko trójfazową wartość skuteczną $\|\mathbf{i}\|$ prądu zasilania, powodując straty energii, proporcjonalne do kwadratu tej wartości. Pojawia się zatem naturalne pytanie, czy można te dwa prądy usunąć całkowicie z prądu zasilania kompensatorem reaktancyjnym włączonym na zaciskach odbiornika tak, jak jest to pokazane na Rys. 7.



Rys. 7. Odbiornik z kompensatorem reaktancyjnym.

Odbiornik opisują cztery admittance Y_b , Y_d , A^p oraz A^n . Przyjmijmy, że kompensator jest bezstratny, oraz oznaczmy jego susceptance międzyprzewodowe symbolami T_{RS} , T_{ST} , oraz T_{TR} . Symbole admittance kopensatora uzupełnione są indeksem C. Admittance te mogą być wyrażone poprzez susceptance kompensatora, mianowicie

$$Y_{Cb} = jB_{Cb} = j \frac{T_{RS} U_{RS}^2 + T_{ST} U_{ST}^2 + T_{TR} U_{TR}^2}{\|\mathbf{u}\|^2} \quad (44)$$

$$Y_{Cd} = j \frac{2a}{1+a^2} [T_{ST} \cos \psi + T_{TR} \cos(\psi - \frac{2\pi}{3}) + T_{RS} \cos(\psi + \frac{2\pi}{3})] \quad (45)$$

$$A_C^p = -j(T_{ST} + \alpha T_{TR} + \alpha^* T_{RS}) \quad (46)$$

$$A_C^n = -j(T_{ST} + \alpha^* T_{TR} + \alpha T_{RS}). \quad (47)$$

Prąd bierny źródła zasilania ma wartość zerową, jeśli

$$B_{Cb} + B_b = 0 \quad (48)$$

natomiast prąd niezrównoważenia źródła jest równy zeru, jeśli

$$(Y_{Cd} + Y_d)U + \mathbf{1}^n(A_C^p + A^p)U^p + \mathbf{1}^p(A_C^n + A^n)U^n = 0. \quad (49)$$

Współczynniki w tym równaniu wektorowym są identyczne dla każdej z linii zasilających, wystarczy zatem, że równanie to jest spełnione dla jednej z linii, w szczególności dla linii R, mianowicie

$$(Y_{Cd} + Y_d)U_R + (A_C^p + A^p)U^p + (A_C^n + A^n)U^n = 0. \quad (50)$$

Ponieważ wyrazy w tym równaniu są liczbami zespolonymi, równanie to musi być spełnione, osobno, dla części rzeczywistej i części urojonej. Równanie (50) wymaga więc spełnienia równań

$$\text{Re}\{(Y_{Cd} + Y_d)U_R + (A_C^p + A^p)U^p + (A_C^n + A^n)U^n\} = 0 \quad (51)$$

$$\text{Im}\{(Y_{Cd} + Y_d)U_R + (A_C^p + A^p)U^p + (A_C^n + A^n)U^n\} = 0. \quad (52)$$

Równania (48), (51) oraz (52) tworzą razem układ trzech równań z trzema niewiadomymi T_{RS} , T_{ST} , oraz T_{TR} . Mogą być one przedstawione, po raczej żmudnych przekształceniach, w postaci **równania kompensatora**:

$$\begin{bmatrix} U_{RS}^2 & U_{ST}^2 & U_{TR}^2 \\ \operatorname{Re}F_1 & \operatorname{Re}F_2 & \operatorname{Re}F_3 \\ \operatorname{Im}F_1 & \operatorname{Im}F_2 & \operatorname{Im}F_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{RS} \\ T_{ST} \\ T_{TR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_b \|\mathbf{u}\|^2 \\ -\operatorname{Re}F_4 \\ -\operatorname{Im}F_4 \end{bmatrix} \quad (53)$$

gdzie

$$F_1 = c_3(1 + ae^{j\psi}) - j(\alpha^* + \alpha ae^{j\psi}), \quad F_2 = c_1(1 + ae^{j\psi}) - j(1 + ae^{j\psi}) \quad (54)$$

$$F_3 = c_2(1 + ae^{j\psi}) - j(\alpha + \alpha^* ae^{j\psi}), \quad F_4 = (1 + ae^{j\psi})Y_d + A^P + (1 + ae^{j\psi})A^n \quad (55)$$

przy czym współczynniki c_1 , c_2 oraz c_3 oznaczają

$$c_1 = j \frac{2a \cos \psi}{1 + a^2}, \quad c_2 = j \frac{2a \cos(\psi - 120^\circ)}{1 + a^2}, \quad c_3 = j \frac{2a \cos(\psi - 240^\circ)}{1 + a^2}. \quad (56)$$

Przykład liczbowy 2. Zilustrujemy przedstawioną powyżej metodę kompensacji obliczeniem parametrów kompensatora równoważącego w obwodzie analizowanym w **Przykładzie 1**. Z wyników otrzymanych dla obwodu przedstawionego na Rys. 5, zespolony współczynnik asymetrii napięcia zasilania ma wartość

$$\mathbf{a} = ae^{j\psi} = \frac{U^n}{U^P} = \frac{33,33e^{j60^\circ}}{66,66} = 0,50e^{j60^\circ}.$$

Zespolone wartości skuteczne napięć zasilania, mierzonych względem sztucznego zera, wynoszą

$$U_R = U^P + U^n = 88,18e^{j19,1^\circ} \text{ V}, \quad U_S = \alpha^* U^P + \alpha U^n = 88,18e^{-j139,1^\circ} \text{ V}, \quad U_T = \alpha U^P + \alpha^* U^n = 33,33e^{j120,0^\circ} \text{ V}$$

zaś napięć międzyprzewodowych

$$U_{RS} = U_R - U_S = 173,21e^{j30^\circ} \text{ V}, \quad U_{ST} = U_S - U_T = 100e^{-j90^\circ} \text{ V}, \quad U_{TR} = U_T - U_R = 100e^{j180^\circ} \text{ V}.$$

Admitancje odbiornika mają wartości

$$A^P = -(Y_{ST} + \alpha Y_{TR} + \alpha^* Y_{RS}) = -[1 + \alpha(-j1)] = 1,932e^{-j165^\circ} \text{ S}$$

$$A^n = -(Y_{ST} + \alpha^* Y_{TR} + \alpha Y_{RS}) = -[1 + \alpha^*(-j1)] = 0,518e^{-j105^\circ} \text{ S}.$$

$$Y_d = \frac{2a}{1+a^2} [Y_{ST} \cos \psi + Y_{TR} \cos(\psi - \frac{2\pi}{3}) + Y_{RS} \cos(\psi + \frac{2\pi}{3})] = \frac{2 \times 0,5}{1+0,5^2} [\cos(60^\circ) - j \cos(60^\circ - 120^\circ)] = 0,566e^{-j45^\circ} \text{ S}.$$

Wartości te pozwalają obliczyć współczynniki (54) – (56) równania kompensatora (53), mianowicie

$$c_1 = j \frac{2a \cos \psi}{1+a^2} = j \frac{2 \times 0,6 \cos 60^\circ}{1+0,5^2} = j0,4, \quad c_2 = j \frac{2a \cos(\psi - 120^\circ)}{1+a^2} = j0,4, \quad c_3 = j \frac{2a \cos(\psi - 240^\circ)}{1+a^2} = -j0,8$$

zatem

$$F_1 = c_3(1 + ae^{j\psi}) - j(\alpha^* + \alpha ae^{j\psi}) = 0,52, \quad F_2 = c_1(1 + ae^{j\psi}) - j(1 + ae^{j\psi}) = 0,26 - j0,75$$

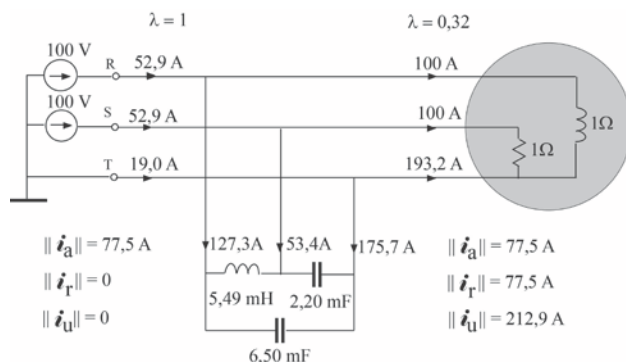
$$F_3 = c_2(1 + ae^{j\psi}) - j(\alpha + \alpha^* ae^{j\psi}) = 0,26 + j0,75, \quad F_4 = (1 + ae^{j\psi})Y_d + A^P + (1 + ae^{j\psi})A^n = -1,01 - j1,01.$$

Równanie kompensatora z powyższymi współczynnikami ma postać

$$\begin{bmatrix} 3 \times 10^4 & 10^4 & 10^4 \\ -0,52 & 0,26 & 0,26 \\ 0 & -0,75 & 0,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{RS} \\ T_{ST} \\ T_{TR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^4 \\ 1,01 \\ 1,01 \end{bmatrix}.$$

Jego rozwiązaniem są wartości susceptancji: $T_{RS} = -0,58 \text{ S}$, $T_{ST} = 0,69 \text{ S}$, $T_{TR} = 2,04 \text{ S}$. Jeśli częstotliwość $f = 50 \text{ Hz}$, zatem $\omega = 314 \text{ rad/s}$, to parametry kompensatora przedstawionego na Rys. 8, mają wartość

$$L_{RS} = -\frac{1}{\omega T_{RS}} = 5,49 \text{ mH}, \quad C_{ST} = \frac{T_{ST}}{\omega} = 2,20 \text{ mF}, \quad C_{TR} = \frac{T_{TR}}{\omega} = 6.50 \text{ mF}.$$



Rys. 8. Odbiornik niezrównoważony z reaktacyjnym kompensatorem równoważącym.

Kompensator o takich parametrach redukuje całkowite prąd bierny i prąd niezrównoważenia, zmniejszając trójfazową wartość skuteczną prądu zasilania z $\|\underline{i}\| = 239.4 \text{ A}$ do $\|\underline{i}\| = 77.5 \text{ A}$, podwyższając współczynnik mocy z wartości $\lambda = 0,32$ do $\lambda = 1$.

5. WNIOSKI

Artykuł pokazuje, że składowe fizyczne prądu odbiornika, stowarzyszone z określonymi zjawiskami fizycznymi, mogą być znalezione nawet wtedy, gdy napięcie zasilania jest niesymetryczne. Proponowany w artykule rozkład prądu odbiornika niezrównoważonego na składowe fizyczne, umożliwia znalezienie poprawnej relacji między mocami odbiornika, czyli równanie mocy. Rozkład ten tworzy podstawę do obliczania parametrów kompensatorów reaktacyjnych umożliwiających kompensację mocy biernej i równoważenie odbiorników w warunkach asymetrii napięciowej.

LITERATURA

- [1] C.L. Fortescue, (1918) Method of symmetrical components as applied to the solution of poly-phase networks, *AIEE* 37, pp. 1027-1140.
- [2] L.S. Czarnecki, (2005), *Moce w Obwodach Elektrycznych z Niesinusoidalnymi Przebiegami Prądów i Napięć*, *Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej*.
- [3] L.S. Czarnecki, (2011), "Moce i kompensacja w obwodach z odkształconymi przebiegami prądu i napięcia, Część. 6. Reaktacyjne równoważenie trójprzewodowych obwodów trójfazowych z sinusoidalnymi przebiegami prądu i napięcia", *Czasopismo on-line: Automatyka, Elektryka, Zakłócenia*, No. 6, pp. 51-57, www.elektro-innowacje.pl