



MOCE I KOMPENSACJA W OBWODACH Z ODKSZTAŁCONYMI I NIESYMETRYCZNYMI PRZEBIEGAMI PRĄDU I NAPIĘCIA

Część 4. Moce w niezrównoważonych obwodach trójfazowych z sinusoidalnymi przebiegami prądu i napięcia

prof. dr hab. inż. Leszek S. CZARNECKI

Fellow IEEE, Alfredo M. Lopez Distinguished Professor, Louisiana State University, USA, e-mail: lsczar@cox.net

s. 44 – 53

POWERS AND COMPENSATION IN CIRCUITS WITH NONSINUSOIDAL AND ASYMMETRICAL VOLTAGES AND CURRENTS

PART 4. POWERS IN UNBALANCED THREE-PHASE CIRCUITS WITH NONSINUSOIDAL VOLTAGES AND CURRENTS

Abstract: This series of papers is devoted to power properties and compensation in circuits with nonsinusoidal voltages and currents. In the case of three-phase circuits, considerations have to start with such circuits at sinusoidal voltages and currents, however, because the known power equation (i.e. the relation between active, reactive and apparent power) of such circuits is valid only at mutually symmetrical voltages and currents. When this condition is not satisfied, this equation is erroneous even if voltages and currents are sinusoidal. Varied opinions in electrical engineering community on how the apparent power S in such circuits should be defined, is one of the major reasons for which the known power equation of three-phase systems is not valid. The analysis of various definitions of the apparent power S in three-phase systems and development, with the CPC approach, of the valid power equation of such systems at sinusoidal voltages and currents is presented in this paper.

Keywords: CPC theory, unbalanced current, unbalanced power

Niniejszy cykl artykułów poświęcony jest właściwościom energetycznym i kompensacji w obwodach z niesinusoidalnymi przebiegami prądu i napięcia. W przypadku obwodów trójfazowych rozważania trzeba zacząć od opisu właściwości energetycznych takich obwodów wtedy gdy przebiegi są sinusoidalne, gdyż znamy równanie mocy, i relacja między nimi jest poprawne tylko wtedy, gdy prądy i napięcia są wzajemnie symetryczne. Gdy wielkości te nie są symetryczne, wówczas równanie to jest błędne, nawet gdy prądy i napięcia są sinusoidalne. Jedną z przyczyn tej błędności wynika z rozbieżności w środowisku inżynierów elektryków odnośnie sposobu definiowania mocy pozornej S . W artykule przedstawiono analizę tych definicji i uzasadnienie dla poprawnego wyboru definicji tej mocy oraz wyprowadzono poprawne równanie mocy obwodów trójfazowych, oparte na teorii mocy Składowych Fizycznych Prądu (CPC).

Słowa kluczowe: Teoria Składowych Fizycznych, prąd niezrównoważenia, moc niezrównoważenia

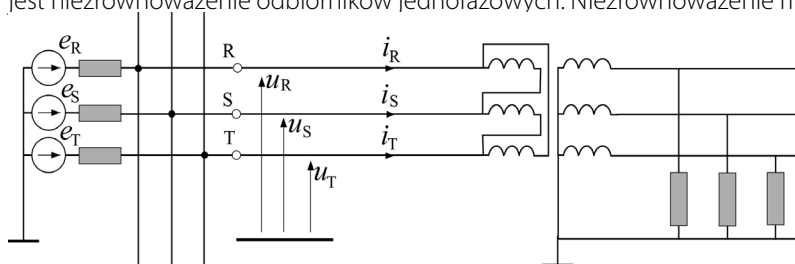
1. ASYMETRIA PRĄDÓW I NAPIĘĆ W SYSTEMACH ENERGETYCZNYCH

Szkodliwość asymetrii napięciowej obserwowana jest głównie w napędach z silnikami indukcyjnymi, gdyż energia dostarczana do silnika przez napięcie i prąd kolejności przeciwnej nie jest przekształcana na energię mechaniczną na wale silnika, lecz na ciepło podwyższające jego temperaturę. Asymetria napięcia zasilania wpływa też ujemnie na pracę prostowników trójfazowych, w szczególności powoduje wzrost odkształceń prądu zasilania, redukuje skuteczność prostowania i poprawność pracy zasilanych z takich prostowników napędów. Pewne firmy produkujące napędy wymagają ograniczenia asymetrii napięcia zasilania do wartości nie wyższej niż 2%.

Asymetria napięć w systemach energetycznych ma dwa, zasadniczo różne źródła. Pierwsze z nich ma charakter strukturalny. Jakkolwiek urządzenia trójfazowe budowane są tak, aby ze względu na poszczególne fazy były one jak najbardziej symetryczne, to niekiedy ich geometria na to nie pozwala, a przynajmniej utrudnia. O ile generator synchroniczny ma naturalną geometryczną symetrię ze względu na poszczególne fazy, to linia lub transformator trójfazowy takiej naturalnej geometrycznej symetrii nie posiadają. Drugą przyczyną asymetrii napięć jest asymetria prądów w trójfazowych liniach rozdzielczych, powodowana głównie brakiem zrównoważenia odbiorników jednofazowych.

Asymetria strukturalna systemu energetycznego nie powoduje zwykle asymetrii napięciowej wyższej od części jednego procenta. Gdy asymetria napięciowa jest rzędu kilku procent, przyczyn tego należy szukać w asymetrii prądów, której głównym źródłem jest niezrównoważenie odbiorników jednofazowych. Niezrównoważenie może więc pojawić się tam, gdzie obwody jednofazowe

łączą się z systemem trójfazowym. Pośredniczy w tym zwykle transformator o konfiguracji uzwojeń D/y, jak to pokazano na rys. 1.



Rys. 1. Przejście od obwodów jednofazowych do systemu trójfazowego

Redukcja stopnia niezrównoważenia odbiorników jednofazowych zasilanych z trójfazowej sieci rozdzielczej jest podstawowym środkiem prowadzącym do poprawy symetrii napięć zasilających. Zrozumienie i opis właściwości energetycznych trójfazowych odbiorników niezrównoważonych ma w związku z tym zasadnicze znaczenie dla opisu oddziaływania takich odbiorników na sieć rozdzielczą, a także dla metod równoważenia odbiorników niezrównoważonych.

2. KŁOPOTY Z MOCĄ POZORNĄ

Z energetycznego punktu widzenia, odbiorniki trójfazowe z sinusoidalnymi przebiegami prądu i napięcia opisywane są równaniem mocy

$$S^2 = P^2 + Q^2, \quad (1)$$

gdzie P , Q oraz S oznaczają moc czynną, bierną i pozorną.

Aby uprościć wzory opisujące obwody trójfazowe, wskazane jest wprowadzić **wektory trójfazowe** napięć i prądów. Mianowicie, wprowadza się pojęcie wektora napięć trójfazowych, który przy założeniu symetrii i sinusoidalnego przebiegu tych napięć ma postać:

$$\mathbf{u}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} u_R(t) \\ u_S(t) \\ u_T(t) \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2} U \begin{bmatrix} \cos(\omega_1 t + \alpha) \\ \cos(\omega_1 t + \alpha - 120^\circ) \\ \cos(\omega_1 t + \alpha + 120^\circ) \end{bmatrix} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_R \\ \mathbf{U}_S \\ \mathbf{U}_T \end{bmatrix} e^{j\omega_1 t} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{U} e^{j\omega_1 t} \}, \quad (2)$$

gdzie $\mathbf{U}_R$, $\mathbf{U}_S$ oraz $\mathbf{U}_T$ oznaczają zespolone wartości skuteczne (crms) napięć fazowych. Dla prądów przewodowych wprowadza się pojęcie wektora prądów trójfazowych:

$$\mathbf{i}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} i_R(t) \\ i_S(t) \\ i_T(t) \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2} \begin{bmatrix} I_R \cos(\omega_1 t + \alpha - \varphi_R) \\ I_S \cos(\omega_1 t + \alpha - 120^\circ - \varphi_S) \\ I_T \cos(\omega_1 t + \alpha + 120^\circ - \varphi_T) \end{bmatrix} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_R \\ \mathbf{I}_S \\ \mathbf{I}_T \end{bmatrix} e^{j\omega_1 t} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{I} e^{j\omega_1 t} \}, \quad (3)$$

gdzie $\mathbf{I}_R$, $\mathbf{I}_S$ oraz $\mathbf{I}_T$ oznaczają zespolone wartości skuteczne prądów przewodowych. Zauważmy, że we wzorze (3) nie zakłada się symetrii prądów przewodowych, co oznacza, że odbiornik może nie być zrównoważony.

Moc czynna P może być obliczana ze wzoru

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T (u_R i_R + u_S i_S + u_T i_T) dt = U_R I_R \cos \varphi_R + U_S I_S \cos \varphi_S + U_T I_T \cos \varphi_T. \quad (4)$$

Moc bierna Q odbiornika trójfazowego definiowana jest wzorem

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} U_R I_R \sin \varphi_R + U_S I_S \sin \varphi_S + U_T I_T \sin \varphi_T. \quad (5)$$

O ile nie ma rozbieżności odnośnie sposobu definiowania mocy czynnej i biernej odbiorników trójfazowych z sinusoidalnymi przebiegami prądu i napięcia, to moc pozorna S definiowana jest na trzy sposoby.

Najbardziej rozpowszechniona wydaje się być definicja mocy pozornej:

$$S \stackrel{\text{def}}{=} U_R I_R + U_S I_S + U_T I_T \stackrel{\text{def}}{=} S_A, \quad (6)$$

określana jako arytmetyczna moc pozorna. Niekiedy moc pozorna definiowana jest wzorem

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{P^2 + Q^2} \stackrel{\text{def}}{=} S_G, \quad (7)$$

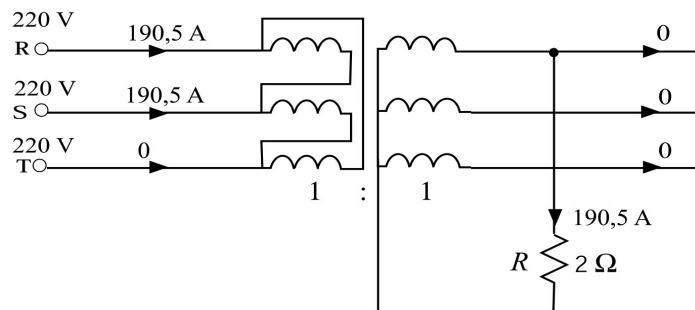
określającym geometryczną moc pozorną. Wydaje się, że najrzadziej używa się definicji mocy pozornej zaproponowanej w 1922 roku Buchholz'a [1],

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{U_R^2 + U_S^2 + U_T^2} \sqrt{I_R^2 + I_S^2 + I_T^2} \stackrel{\text{def}}{=} S_B. \quad (8)$$

Trzeba w tym miejscu zwrócić uwagę na to, że mamy tu do czynienia nie z trzema różnymi sposobami definiowania tej samej mocy. Wzory (6), (7) oraz (8) definiują w istocie trzy różne, lecz nazywane tak samo, moce.

W przypadku odbiorników zrównoważonych, a więc symetrii prądów zasilania, te trzy definicje mocy pozornej dają te same wartości liczbowe – może więc być sprawą obojętną, której definicji użyje się do jej obliczania. Różnice w wartości liczbowej pojawiają się dopiero wtedy, gdy odbiornik jest odbiornikiem niezrównoważonym.

Aby to zilustrować, obliczmy moc pozorną S w obwodzie pokazanym na rys. 2. Aby ułatwić obliczenia przyjęto, że transformator jest bezstratny, idealny, z przekładnią zwojową 1:1. Transformator zasilany jest napięciem sinusoidalnym i symetrycznym, o wartości skutecznej względem ziemi $U = 220$ V. Po stronie wtórnej transformatora obciążona jest tylko jedna faza odbiornikiem o rezystancji $R = 2\ \Omega$. Moc czynna tego odbiornika wynosi $P = 72,6$ kW. Ponieważ transformator jest bezstratny, jest to też moc czynna po stronie pierwotnej transformatora. Moc bierna Q jest równa zero. Wartości skuteczne prądów przewodowych podane są na rys. 2.



Rys. 2. Przykład niezrównoważonego odbiornika trójfazowego

Moc pozorna tego odbiornika, zależnie od przyjętej definicji, wynosi

$$S_A = 83,8 \text{ kVA}, \quad S_G = 72,6 \text{ kVA}, \quad S_B = 102,7 \text{ kVA}.$$

A zatem, współczynnik mocy, definiowany jako stosunek mocy czynnej do mocy pozornej:

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P}{S}, \quad (9)$$

zależy od użytej definicji mocy pozornej i wynosi, odpowiednio:

$$\lambda_A = 0,86, \quad \lambda_G = 1, \quad \lambda_B = 0,71.$$

Współczynnik mocy λ jest jednym z najważniejszych parametrów służących do oceny właściwości energetycznych odbiorców energii elektrycznej, branych pod uwagę w rozliczeniach energetycznych między dostawcą i odbiorcą energii. W szczególności, odbiorca może być finansowo zobowiązany do utrzymywania współczynnika mocy na określonym poziomie, bądź też cena jednostki energii może zależeć od wartości współczynnika mocy. Sytuacja, w której wartość tego współczynnika zależy od wyboru definicji mocy pozornej jest co najmniej kłopotliwa. Wybór ten może mieć bowiem skutki finansowe. Niestety, klasyczna teoria mocy nie daje żadnych przesłanek odnośnie wyboru definicji mocy pozornej.

3. WYBÓR DEFINICJI MOCY POZORNEJ, S

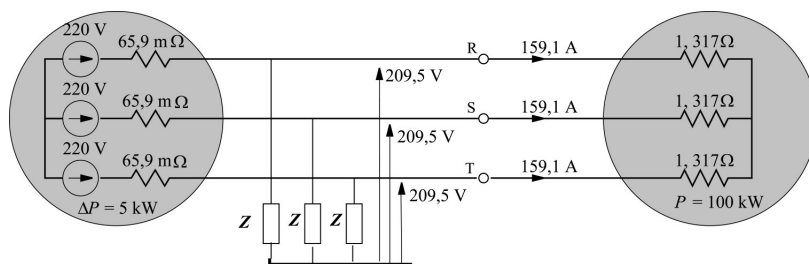
W odróżnieniu od mocy czynnej P , moc pozorna S nie jest wielkością fizyczną, lecz pewną wielkością umowną, określającą urządzenia przesyłowe pod kątem dostarczanego do odbiornika prądu i napięcia. W obwodach jednofazowych moc pozorna S jest iloczynem wartości skutecznych, oznaczanych ogólnie [3, 5] symbolem $\|\cdot\|$, prądu i napięcia na zaciskach odbiornika, mianowicie,

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \|u\| \|i\|. \quad (10)$$

Tak definiowana moc pozorna, a dokładnie jej maksymalna wartość, jest pewną miarą wielkości urządzeń przesyłowych niezbędnych do zasilania odbiorników z mocą czynną P . W przypadku urządzeń trójfazowych, taka interpretacja nie jest jednoznaczna i prowadzi do różnych, podanych powyżej definicji mocy pozornej.

Moc pozorna służy także do określania współczynnika mocy λ . Zmniejszanie się tego współczynnika przy stałej mocy czynnej P , oznacza wzrost wartości skutecznej prądu zasilania, a zatem wzrost strat energii u jej dostawcy. Właśnie ta cecha współczynnika mocy λ może być użyta jako podstawa wyboru właściwej definicji mocy pozornej S w systemach trójfazowych, gdyż poszczególne jej definicje dają odmienne wartości współczynnika mocy. Wybór ten został uzasadniony w artykule [2] w sposób następujący.

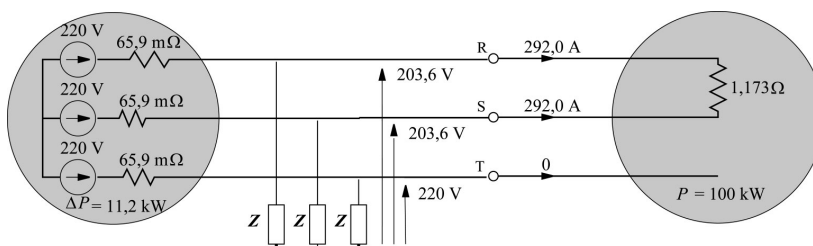
Parametry obwodu przedstawionego na rys. 3. zostały tak dobrane, aby przy symetrycznym napięciu zasilania o wartości skutecznej napięcia źródłowego $E = 220$ V, moc czynna odbiornika zrównoważonego wynosiła $P = 100$ kW, a moc czynna strat na rezystancji wewnętrznej wynosiła 5% mocy czynnej odbiornika, a więc 5 kW.



Rys. 3. Obwód rezystancyjny ze zrównoważonym odbiornikiem

Parametry oraz wartości skuteczne prądów i napięć w tym obwodzie podane są na rys. 3. Ponieważ prądy i napięcia w tym obwodzie są symetryczne, a obwód jest rezystancyjny, moc pozorna, niezależnie od jej definicji, ma tę samą wartość, $S_A = S_G = S_B = P = 100 \text{ kVA}$.

To samo źródło zostało następnie użyte do zasilania rezystancyjnego odbiornika niezrównoważonego, pokazanego na rys. 4, o takiej samej mocy czynnej, $P = 100 \text{ kW}$,



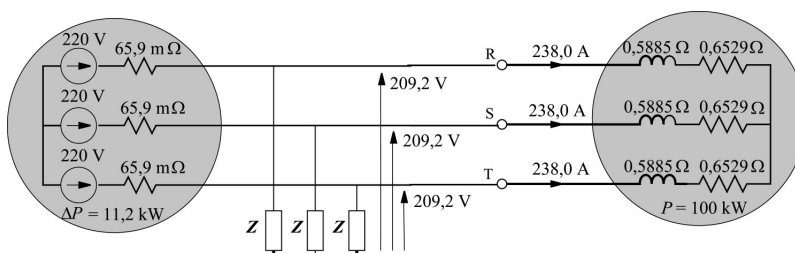
Rys. 4. Obwód rezystancyjny z odbiornikiem niezrównoważonym

Wartości skuteczne prądów i napięć w takim obwodzie pokazane są na rys. 4. Ponieważ prądy i napięcia w obwodzie nie są symetryczne zatem, zależnie od wyboru definicji, otrzymuje się różne wartości mocy pozornej i różne wartości współczynnika mocy, mianowicie

$$S_A = 119 \text{ kVA}, \quad S_G = 100 \text{ kVA}, \quad S_B = 149,6 \text{ kVA}, \\ \lambda_A = 0,84, \quad \lambda_G = 1, \quad \lambda_B = 0,67.$$

Zauważmy, że ze zmianą obciążenia na niezrównoważone moc strat w źródle wzrosła z 5 kW do 11,2 kW, a więc odbiornik niezrównoważony jest odbiornikiem o niższym współczynniku mocy w porównaniu z odbiornikiem zrównoważonym. Tymczasem użycie geometrycznej definicji mocy pozornej S_G daje współczynnik mocy $\lambda_G = 1$. Ta obserwacja dyskwalifikuje geometryczną definicję mocy pozornej jako definicję prowadzącą do błędnej wartości współczynnika mocy.

W trzecim kroku rozumowania stawia się pytanie, jaki byłby współczynnik mocy symetrycznego odbiornika RL, a więc niezależnego od wyboru definicji mocy pozornej, o tej samej mocy czynnej $P = 100 \text{ kW}$, zasilanego z tego samego źródła? Parametry odbiornika spełniającego powyższe warunki i wyniki jego analizy pokazane są na rys. 5.



Rys. 5. Obwód ze zrównoważonym odbiornikiem RL,

równoważny ze względu na moc czynną P odbiornikowi niezrównoważonemu na rys. 4.

Ponieważ odbiornik RL jest zrównoważony, zatem poszczególne definicje mocy pozornej dają te same wyniki numeryczne, mianowicie

$$S_A = S_B = 149,6 \text{ kVA}, \quad \lambda_A = \lambda_B = 0,67.$$

Tak więc, obwód z odbiornikiem zrównoważonym zasilanym z tego samego źródła jest ze względu na straty mocy czynnej w źródle i współczynnik mocy równoważny odbiornikowi niezrównoważonemu, o ile moc pozorna obliczona jest według definicji:

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{U_R^2 + U_S^2 + U_T^2} \sqrt{I_R^2 + I_S^2 + I_T^2}.$$

Ta więc definicja daje poprawną wartość współczynnika mocy λ odbiornika niezrównoważonego, natomiast definicja arytmetyczna (6) oraz definicja geometryczna (7) prowadzą do błędnych wartości tego współczynnika.

Jeśli jednak moc pozorna obliczana jest według tej definicji, to równanie mocy

$$S^2 = P^2 + Q^2,$$

nie może być spełnione. Jest ono spełnione tylko przy geometrycznej definicji mocy pozornej. Dla przykładu, w obwodzie na rys. 2, poprawna wartość mocy pozornej wynosi $S = 102,7$ kVA, a moce po prawej stronie równania wynoszą, odpowiednio, $P = 72,6$ kW, $Q = 0$. Tak więc, powszechnie używane równanie mocy (1), w sytuacji gdy odbiornik nie jest zrównoważony, a więc prądy przewodowe nie są symetryczne, jest błędne. Poprawne równanie mocy odbiorników niezrównoważonych zostało wyprowadzone [3, 5] dopiero w ramach teorii mocy Składowych Fizycznych Prądu (Currents' Physical Components – CPC)

4. ILOCZYN SKALARNY I WARTOŚĆ SKUTECZNA WIELKOŚCI TRÓJFAZOWYCH

Opis właściwości energetycznych obwodów trójfazowych jest znacznie bardziej złożony niż obwodów jednofazowych, gdyż nawet w najprostszym przypadku zależą one od trzech prądów i trzech napięć. Można ten opis i wzory matematyczne znacznie uprościć opisując je za pomocą wektorów trójfazowych prądu i napięcia, zdefiniowanych wzorami (2) i (3). Do opisu tego potrzebne są jeszcze dwa pojęcia, mianowicie, pojęcie iloczynu skalarnego wektorów trójfazowych oraz pojęcie wartości skutecznej wielkości trójfazowych.

Iloczyn skalarny wektorów trójfazowych. Jeśli $\mathbf{x}(t)$ oraz $\mathbf{y}(t)$ są wektorami okresowych wielkości trójfazowych o tym samym okresie T , to ich iloczyn skalarny definiuje się wzorem:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T [x_R(t)y_R(t) + x_S(t)y_S(t) + x_T(t)y_T(t)] dt = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{x}^T(t) \mathbf{y}(t) dt. \quad (11)$$

Zauważmy, że moc czynna P odbiornika trójfazowego jest właśnie iloczynem skalarnym wektorów prądu i napięcia odbiornika, gdyż

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T [u_R(t)i_R(t) + u_S(t)i_S(t) + u_T(t)i_T(t)] dt = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}^T(t) \mathbf{i}(t) dt = (\mathbf{u}, \mathbf{i}). \quad (12)$$

Wartość skuteczna wielkości trójfazowych. Jeśli prąd przepływa przez urządzenie trójfazowe pokazane na rys. 6, to jego moc czynna ma wartość

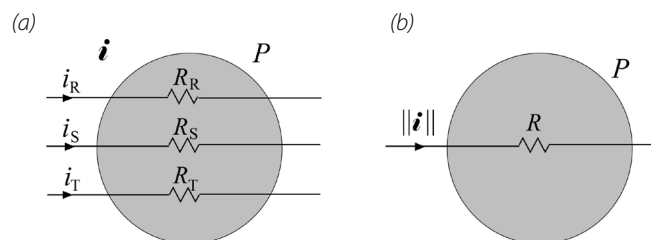
$$P = \frac{1}{T} \int_0^T (R_R i_R^2 + R_S i_S^2 + R_T i_T^2) dt. \quad (13)$$

Urządzenia trójfazowe budowane są tak, aby były możliwie najbardziej symetryczne, można więc przyjąć, że

$$R_R = R_S = R_T \stackrel{\text{def}}{=} R,$$

a zatem moc czynna tego urządzenia może być wyrażona wzorem

$$P = R \frac{1}{T} \int_0^T (i_R^2 + i_S^2 + i_T^2) dt = R(\mathbf{i}, \mathbf{i}) \stackrel{\text{def}}{=} R \|\mathbf{i}\|^2. \quad (14)$$



Rys. 6. Urządzenie trójfazowe (a) i równoważne mu ze względu na moc czynną, urządzenie jednofazowe Δ (b)

Wielkość

$$\|\mathbf{i}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(\mathbf{i}, \mathbf{i})} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{i}^T \mathbf{i} dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (i_R^2 + i_S^2 + i_T^2) dt} = \sqrt{\|i_R\|^2 + \|i_S\|^2 + \|i_T\|^2}, \quad (15)$$

określa wartość skuteczną wektora prądu trójfazowego. Jest to wartość prądu stałego rezystora na rys 6(b) o rezystancji R oraz mocy czynnej P , równej mocy czynnej urządzenia trójfazowego, pokazanego na rys. 6(a), z prądem $\mathbf{i}(t)$.

Analogicznie definiuje się wartość skuteczną wektora napięcia trójfazowego, mianowicie

$$\|u\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(u, u)} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^T u dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (u_R^2 + u_S^2 + u_T^2) dt} = \sqrt{\|u_R\|^2 + \|u_S\|^2 + \|u_T\|^2}. \quad (16)$$

Ortogonalność wektorów trójfazowych. Wartość skuteczna sumy dwóch wektorów trójfazowych wielkości $x(t)$ oraz $y(t)$ o tym samym okresie T , jest równa

$$\|x + y\| = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [x(t) + y(t)]^2 dt} = \sqrt{\|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2}. \quad (17)$$

Jeśli znane są wartości skuteczne wektorów $x(t)$ i $y(t)$, to wartość skuteczna ich sumy może być obliczana ze wzoru

$$\|x + y\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}, \quad (18)$$

tylko wtedy, gdy ich iloczyn skalarny spełnia warunek

$$(x, y) = 0,$$

to jest tylko wtedy, gdy wektory te są wzajemnie ortogonalne.

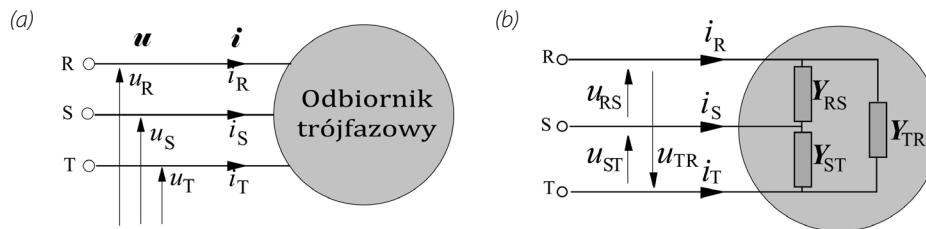
Gdy przebiegi prądów i napięć w obwodzie trójfazowym są sinusoidalne, a wartości skuteczne prądów liniowych i napięć fazowych oznaczane są zwyczajowo symbolami I_R, I_S, I_T oraz U_R, U_S, U_T , wówczas wartości skuteczne wektorów trójfazowych prądu i napięcia można przedstawić w postaci

$$\|i\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(i, i)} = \sqrt{I_R^2 + I_S^2 + I_T^2}, \quad (19)$$

$$\|u\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(u, u)} = \sqrt{U_R^2 + U_S^2 + U_T^2}. \quad (20)$$

5. SKŁADOWE FIZYCZNE SINUSOIDALNEGO PRĄDU TRÓJFAZOWEGO

Dowolny liniowy odbiornik trójfazowy o niezmiennych w czasie parametrach i zasilany ze źródła symetrycznego napięcia, jak jest to pokazane na rys. 7(a), ma [6] nieskończenie wiele równoważnych odbiorników o strukturze pokazanej na rys. 7(b).



Rys. 7. Odbiornik trójfazowy (a) i równoważny mu odbiornik o strukturze Δ (b)

Zespolone wartości skuteczne (complex rms – crms) prądów zasilania można wyrazić przez admitancje międzyfazowe odbiornika równoważnego

$$\begin{aligned} I_R &= Y_{RS}(U_R - U_S) - Y_{TR}(U_T - U_R), \\ I_S &= Y_{ST}(U_S - U_T) - Y_{RS}(U_R - U_S), \\ I_T &= Y_{TR}(U_T - U_R) - Y_{ST}(U_S - U_T). \end{aligned} \quad (21)$$

Jeżeli napięcie zasilania jest symetryczne o kolejności dodatniej, to znaczy

$$u_S(t) = u_R(t - T/3), \quad u_T(t) = u_R(t + T/3), \quad (22)$$

to zespolone wartości skuteczne napięć zasilania spełniają warunek

$$U_S = \alpha^* U_R, \quad U_T = \alpha U_R, \quad (23)$$

gdzie $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} 1e^{j\frac{2\pi}{3}}$ zaś α^* oznacza liczbę sprzężoną, to jest $\alpha^* \stackrel{\text{def}}{=} 1e^{-j\frac{2\pi}{3}}$. Korzystając z tożsamości (23), zespolone wartości skuteczne prądów zasilania (21) można przekształcić jak następuje

$$\begin{aligned}
I_R &= (Y_{RS} + Y_{ST} + Y_{TR})U_R - (Y_{ST} + \alpha Y_{TR} + \alpha^* Y_{RS})U_R = Y_e U_R + A U_R, \\
I_S &= (Y_{RS} + Y_{ST} + Y_{TR})U_S - (Y_{ST} + \alpha Y_{TR} + \alpha^* Y_{RS})U_T = Y_e U_S + A U_T, \\
I_T &= (Y_{RS} + Y_{ST} + Y_{TR})U_T - (Y_{ST} + \alpha Y_{TR} + \alpha^* Y_{RS})U_S = Y_e U_T + A U_S.
\end{aligned} \quad (24)$$

Tak więc, przy określonych wartościach skutecznych napięcia zasilania, wartości skuteczne określone są dwoma zespolonymi parametrami odbiornika. Pierwszy z nich:

$$Y_e \stackrel{\text{def}}{=} G_e + jB_e = Y_{RS} + Y_{ST} + Y_{TR}, \quad (25)$$

nazwano w artykule [3] **admitancją równoważną** (equivalent admittance) odbiornika trójfazowego. Drugi z tych parametrów

$$A \stackrel{\text{def}}{=} A e^{j\psi} = -(Y_{ST} + \alpha Y_{TR} + \alpha^* Y_{RS}), \quad (26)$$

jest dla odbiorników zrównoważonych, to jest wtedy, gdy $Y_{RS} = Y_{ST} = Y_{TR} = Y$, równy zeru. Dlatego parametr ten nazwano **admittancją niezrównoważenia** (unbalanced admittance).

Oznaczając

$$\mathbf{U} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} U_R \\ U_S \\ U_T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}^\# \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} U_R \\ U_T \\ U_S \end{bmatrix}, \quad (27)$$

wektor prądu zasilania odbiornika trójfazowego (3) może być rozłożony w sposób następujący

$$\mathbf{i} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left\{ Y_e \begin{bmatrix} U_R \\ U_S \\ U_T \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} U_R \\ U_T \\ U_S \end{bmatrix} e^{j\omega t} \right\} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ (G_e \mathbf{U} + jB_e \mathbf{U} + A \mathbf{U}^\#) e^{j\omega t} \} = \mathbf{i}_a + \mathbf{i}_r + \mathbf{i}_u, \quad (28)$$

gdzie

$$\mathbf{i}_a \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ G_e \mathbf{U} e^{j\omega t} \}, \quad (29)$$

jest wektorem składowych czynnych prądu odbiornika, lub po prostu, prądem czynnym odbiornika

$$\mathbf{i}_r \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ jB_e \mathbf{U} e^{j\omega t} \}, \quad (30)$$

jest wektorem składowych biernych prądu odbiornika, lub po prostu, prądem biernym odbiornika

$$\mathbf{i}_u \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ A \mathbf{U}^\# e^{j\omega t} \}. \quad (31)$$

jest wektorem składowych niezrównoważenia lub po prostu, **prądem niezrównoważenia** (unbalanced current) odbiornika trójfazowego. W tradycyjnych opisach właściwości energetycznych obwodów trójfazowych rozróżnia się tylko dwie składowe prądu odbiornika: prąd czynny i prąd bierny. Teoria mocy CPC ujawnia trzeci składnik tego prądu, prąd niezrównoważenia $\mathbf{i}_u$. Wartości skuteczne tych trzech składowych prądu odbiornika wynoszą, odpowiednio:

$$\|\mathbf{i}_a\| = G_e \|\mathbf{u}\|, \quad (32)$$

$$\|\mathbf{i}_r\| = |B_e| \|\mathbf{u}\|, \quad (33)$$

$$\|\mathbf{i}_u\| = A \|\mathbf{u}\|. \quad (34)$$

Składowa czynna i bierna, $\mathbf{i}_a$ oraz $\mathbf{i}_r$, prądu odbiornika mają prostą interpretację fizyczną. Pojawiają się one w prądzie odbiornika wtedy, i tylko wtedy, gdy odbiornik ma, odpowiednio, moc czynną P i moc bierną Q , gdyż

$$\begin{aligned}
P &= \operatorname{Re} \{ Y_{RS} \} U_{RS}^2 + \operatorname{Re} \{ Y_{ST} \} U_{ST}^2 + \operatorname{Re} \{ Y_{TR} \} U_{TR}^2 = \\
&= \operatorname{Re} \{ Y_{RS} + Y_{ST} + Y_{TR} \} 3 U_R^2 = G_e \|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{i}_a\|,
\end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
Q &= \operatorname{Im} \{ Y_{RS}^* \} U_{RS}^2 + \operatorname{Im} \{ Y_{ST}^* \} U_{ST}^2 + \operatorname{Im} \{ Y_{TR}^* \} U_{TR}^2 = \\
&= \operatorname{Im} \{ Y_{RS}^* + Y_{ST}^* + Y_{TR}^* \} 3 U_R^2 = -B_e \|\mathbf{u}\|^2 = \pm \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{i}_r\|.
\end{aligned} \quad (36)$$

Ostatnia ze składowych prądu odbiornika, prąd niezrównoważenia $\mathbf{i}_u$, pojawia się wtedy, gdy prąd odbiornika nie jest symetryczny. Tak się dzieje wtedy, gdy admitancja niezrównoważenia odbiornika, A , zdefiniowana wzorem (26), jest różna od zera. Jest ona równa zeru dla odbiorników zrównoważonych, to jest o wzajemnie równych admitancjach międzyprzewodowych, Y_{RS} , Y_{ST} ,

Y_{TR} , lecz jest to tylko warunek wystarczający na to, aby admitancja niezrównoważenia A była równa zero, lecz nie jest to warunek konieczny. Należy tu zwrócić uwagę na to, że o ile prąd czynny i prąd bierny, i_a oraz i_r , są prądami symetrycznymi kolejności dodatniej, (zgodnej) to prąd niezrównoważenia jest prądem symetrycznym kolejności ujemnej (przeciwnej).

Tak więc, rozkład prądu

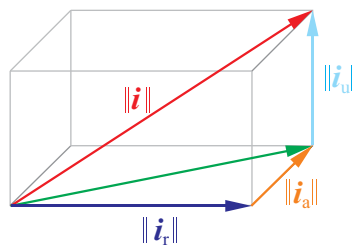
$$i = i_a + i_r + i_u. \quad (37)$$

jest rozkładem na składowe fizyczne, gdyż każda z jego składowych jest jednoznacznie stowarzyszona z odmiennym zjawiskiem fizycznym. Prąd czynny stowarzyszony jest z trwałym przepływem energii ze źródła do odbiornika, a więc z mocą czynną, P . Prąd bierny stowarzyszony jest ze zjawiskiem przesunięcia fazowego prądu względem napięcia, a więc z mocą bierną, Q . Wreszcie prąd niezrównoważenia stowarzyszony jest ze zjawiskiem asymetrii prądowej, spowodowanej niezrównoważeniem odbiornika.

Składowe fizyczne i_a , i_r oraz i_u są wzajemnie ortogonalne [3, 5], gdyż ich iloczyny skalarne (i_a, i_r) , (i_a, i_u) , (i_r, i_u) są równe zero, a zatem ich wartości skuteczne spełniają relację

$$\|i\|^2 = \|i_a\|^2 + \|i_r\|^2 + \|i_u\|^2, \quad (38)$$

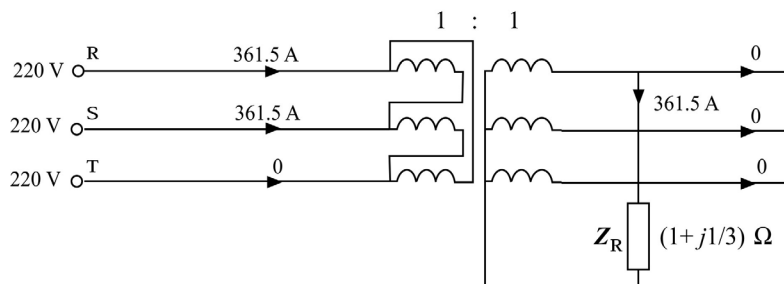
którą geometrycznie ilustruje sześcian wartości skutecznych składowych fizycznych prądu, pokazany na rys. 8,



Rys.8. Sześcian wartości skutecznych składowych fizycznych prądu odbiornika trójfazowego

Przykład. Aby zilustrować rozkład prądu odbiornika na składowe fizyczne, rozpatrzmy obwód przedstawiony na rys. 9, z idealnym transformatorem o przekładni zwojowej 1:1, zasilany ze źródła sinusoidalnego i symetrycznego napięcia kolejności dodatniej, o napięciu fazy R względem ziemi:

$$u_R(t) = 220\sqrt{2} \cos \omega t \text{ V} ,$$



Rys. 9. Przykład odbiornika niezrównoważonego

Wartość skuteczna wektora napięcia zasilania jest równa

$$\|u\| = \sqrt{U_R^2 + U_S^2 + U_T^2} = \sqrt{3 \times 220^2} = 220\sqrt{3} = 381 \text{ V} .$$

Wartości skuteczne prądu zasilania faz R i S wynoszą $I_R = I_S = 361,5 \text{ A}$, zaś fazy T , $I_T = 0$, a zatem wartość skuteczna wektora prądu zasilania

$$\|i\| = \sqrt{I_R^2 + I_S^2 + I_T^2} = \sqrt{2 \times 361,5^2} = 361,5\sqrt{2} = 511 \text{ A} .$$

Admitancje międzyfazowe równoważnego odbiornika o strukturze Δ wynoszą

$$Y_{RS} = \frac{1}{Z_R} = \frac{1}{1 + j0,333} = 0,90 - j0,30 \text{ S}, \quad Y_{ST} = 0, \quad Y_{TR} = 0 ,$$

a zatem admitancja równoważna odbiornika ma wartość

$$Y_e = G_e + jB_e = Y_{RS} + Y_{ST} + Y_{TR} = Y_{RS} = 0,90 - j0,30 = 0,95 e^{-j18^\circ} \text{ S} ,$$

natomiast admitancja niezrównoważenia,

$$A = -(Y_{ST} + \alpha Y_{TR} + \alpha^* Y_{RS}) = -\alpha^* Y_{RS} = -1e^{-j120^\circ} \times 0,95e^{-j18^\circ} = 0,95e^{j42^\circ} S.$$

Prąd czynny odbiornika, zgodnie z definicją (29) ma przebieg

$$i_a = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left\{ 0,90 \begin{bmatrix} 220 \\ 220e^{-j120^\circ} \\ 220e^{j120^\circ} \end{bmatrix} e^{j\omega t} \right\} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left\{ \begin{bmatrix} 198 \\ 198e^{-j120^\circ} \\ 198e^{j120^\circ} \end{bmatrix} e^{j\omega t} \right\} A,$$

prąd bierny

$$i_r = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left\{ j0,30 \begin{bmatrix} 220 \\ 220e^{-j120^\circ} \\ 220e^{j120^\circ} \end{bmatrix} e^{j\omega t} \right\} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left\{ \begin{bmatrix} 66e^{j90^\circ} \\ 66e^{-j30^\circ} \\ 66e^{j210^\circ} \end{bmatrix} e^{j\omega t} \right\} A,$$

i wreszcie prąd niezrównoważenia

$$i_u = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left\{ 0,95e^{j42^\circ} \begin{bmatrix} 220 \\ 220e^{+j120^\circ} \\ 220e^{-j120^\circ} \end{bmatrix} e^{j\omega t} \right\} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left\{ \begin{bmatrix} 209e^{j42^\circ} \\ 209e^{j162^\circ} \\ 209e^{-j78^\circ} \end{bmatrix} e^{j\omega t} \right\} A.$$

Wartości skuteczne wektorów tych prądów wynoszą

$$||i_a|| = G_e ||u|| = 0,90 \times 381 = 343 A,$$

$$||i_r|| = |B_e| ||u|| = 0,3 \times 381 = 114 A,$$

$$||i_u|| = A ||u|| = 0,95 \times 381 = 361 A.$$

Wartość skuteczna prądu zasilającego może być obliczona z sumy kwadratów wartości skutecznych składowych fizycznych, mianowicie

$$||i|| = \sqrt{||i_a||^2 + ||i_r||^2 + ||i_u||^2} = \sqrt{343^2 + 114^2 + 361^2} = 511 A,$$

lub też z sumy kwadratów prądów przewodowych

$$||i|| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(i, i)} = \sqrt{I_R^2 + I_S^2 + I_T^2} = \sqrt{2 \times 361,5^2} = 511 A,$$

co może służyć jako sprawdzian poprawności rozkładu prądu na składowe fizyczne.

6. RÓWNANIE MOCY ODBIORNIKA TRÓJFAZOWEGO

Mnożąc równanie (38) wiążące wartości skuteczne wektorów składowych fizycznych prądu odbiornika przez kwadrat wartości skutecznej napięcia zasilania, mianowicie

$$||i||^2 = ||i_a||^2 + ||i_r||^2 + ||i_u||^2 \quad | \times ||u||^2,$$

otrzymuje się równanie mocy odbiornika trójfazowego

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2, \quad (39)$$

w którym moc pozorna S zdefiniowana jest zgodnie z wynikami Sekcji 3 niniejszego artykułu, gdyż dla przebiegów sinusoidalnych:

$$S \stackrel{\text{def}}{=} ||u|| ||i|| = \sqrt{U_R^2 + U_S^2 + U_T^2} \times \sqrt{I_R^2 + I_S^2 + I_T^2}. \quad (40)$$

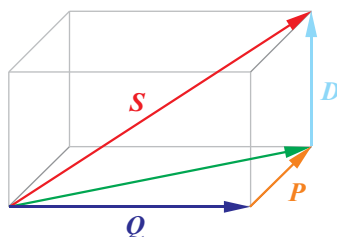
Pozostałe moce zdefiniowane są wyrażeniami

$$P \stackrel{\text{def}}{=} ||u|| \cdot ||i_a|| = G_e ||u||^2, \quad (41)$$

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \pm ||u|| \cdot ||i_r|| = -B_e ||u||^2, \quad (42)$$

$$D \stackrel{\text{def}}{=} ||u|| \cdot ||i_u|| = A ||u||^2. \quad (43)$$

W równaniu mocy (39) pojawia się nowa wielkość energetyczna, **moc nie zrównoważenia** (unbalanced power), D . Tak więc, aby opisać właściwości energetyczne odbiornika trójfazowego przy sinusoidalnym i symetrycznym napięciu zasilania trzeba znać nie tylko jego moc czynną i bierną, ale także moc nie zrównoważenia. Geometryczną ilustracją zależności między mocami odbiornika trójfazowego jest sześcian mocy, pokazany na rys. 10. Należy tu zwrócić uwagę na to, że niezależnie od wartości napięcia zasilania, właściwości energetyczne odbiornika trójfazowego określają dwa parametry, jego admitancja równoważna, $Y_e = G_e + jB_e$ oraz admitancja nie zrównoważenia A .



Rys. 10. Prostopadłościan mocy odbiornika trójfazowego

7. PODSUMOWANIE

W artykule tym wyprowadzono poprawne równanie mocy odbiorników trójfazowych zasilanych trójprzewodowo symetrycznym i sinusoidalnym napięciem trójfazowym. Równanie to wymaga wprowadzenia nowej wielkości energetycznej, nazwanej mocą nie zrównoważenia, a także poprawnego wyboru definicji mocy pozornej.

Pokazano, że zarówno arytmetyczna jak i geometryczna definicja tej mocy prowadzą do błędnego obliczania współczynnika mocy.

Dopiero takie, poprawne równanie mocy odbiornika trójfazowego z sinusoidalnymi przebiegami prądu i napięcia może być punktem wyjścia do poszukiwania opisu właściwości energetycznych i równania mocy obwodów z przebiegami niesinusoidalnymi.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Buchholz F.: (1922) Die Drehstrom-Scheinleistung ein ungleichmässiger Belastung drei Zweige, Licht und Kraft, No. 2, January 1922, pp. 9-11.
- [2] Czarnecki L.S.: (1999) Energy flow and power phenomena in electrical circuits: illusions and reality, Archiv fur Elektrotechnik, (82), No. 4, pp. 10-15.
- [3] Czarnecki L.S.: (1988) Orthogonal decomposition of the current in a three-phase non-linear asymmetrical circuit with nonsinusoidal voltage, IEEE Trans. Instr. Measur., Vol. IM-37, No. 1, pp. 30-34.
- [4] Czarnecki L.S.: (1989) Reactive and unbalanced currents compensation in three-phase circuits under nonsinusoidal conditions, IEEE Trans. Instr. Measur., Vol. IM-38, No. 3, pp. 754-459.
- [5] Czarnecki, L.S.: (2005) Moce w Obwodach Elektrycznych z Niesinusoidalnymi Przebiegami Prądów i Napięć, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej.
- [6] Czarnecki, L.S.: (1995) Equivalent circuits of unbalanced loads supplied with symmetrical and asymmetrical voltage and their identification, Archiv fur Elektrotechnik, 78 pp. 165-168.

otrzymano / received: 5.04.2011 przyjęto do publikacji / accepted: 15.06.2011